

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
PREHRAMBENO-TEHNOLOŠKI FAKULTET OSIJEK

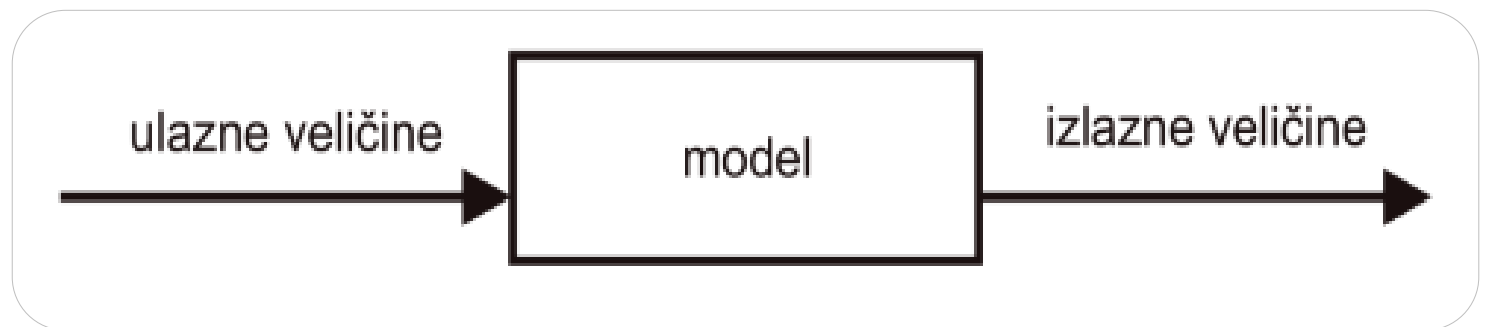
**MODELIRANJE I UPRAVLJANJE
U PREHRAMBENO-TEHNOLOŠKIM PROCESIMA**

MODELIRANJE OPERACIJA I PROCESA

Materijali s predavanja -

Prof. dr. sc. Damir Magdić

*redoviti profesor u trajnom izboru
znanstveni savjetnik u trajnom izboru*



**MODELIRANJE I UPRAVLJANJE
U PREHRAMBENO-TEHNOLOŠKIM PROCESIMA**

(PhI: P-S-V = 45-15-15)

MODELIRANJE OPERACIJA I PROCESA

(PcI: P-S-V = 30-0-30)

<http://www.ptfos.unios.hr/modeli/>

damir.magdic@ptfos.hr

tel. 031 224 330

OČEKIVANI ISHODI UČENJA

Studenti će biti osposobljeni za:

- samostalno korištenje računalnih simulacija pojedinih tehnoloških operacija i procesa,
- usporedbu računalnih programa i odabir najprikladnijih,
- kombiniranje različitih računalnih programa za modeliranje i simulacije,
- optimiranje procesa, proizvoda i dobiti u proizvodnji i konzumiranju hrane,

- samostalno analiziranje informacija i donošenje zaključaka,
- samostalan ili timski rad u području modeliranja i optimiranja u prehrambeno-procesnom inženjerstvu i nutricionizmu,
- izradu inženjerskih izvješća o rezultatima modeliranja i optimiranja.

Studenti će biti upoznati sa znanstvenim istraživanjima u području modeliranja u procesnom inženjerstvu i izrađenim diplomskim radovima na nastavnom predmetu.

I. OSNOVE MODELIRANJA SUSTAVA

1. Uvod u modeliranje i upravljanje
2. Primjene modela
3. Primjeri modela
 - proces sterilizacije namirnica
 - proces smrzavanja hrane
4. Analiza matematičkog modela i realnog sustava
5. Metodologija razvoja modela
6. Znanstveni sadržaj modeliranja u biotehnologiji

II. PODJELA MATEMATIČKIH MODELA

1. s usredotočenim veličinama stanja (koncentrirani)
s raspodijeljenim veličinama stanja (distribuirani)
2. deterministički - stohastički
3. kontinuirani - diskontinuirani
4. linearni - nelinearni
5. ...

III. MODELI STACIONARNIH STANJA

1. Modeli kemijskih i enzimskih reakcijskih sustava
 - opći oblik bilance mase :
 - kemijske reakcije
2. Bilanca mase i modeli stacionarnih stanja
3. Matematičke metode za određivanje stacionarnih stanja
 - direktne (Gaussova metoda)
 - iterativne (Jacobijeva linearna iteracija)

4. Matematički modeli nelinearnih sustava i njihovih stacionarnih stanja
 - uparivač i uparna stanica

5. Matematičke metode za određivanje stacionarnih stanja modela nelinearnih sustava
 - Jacobijeva linearna iteracija
 - Newton-Raphsonova metoda

7. Primjeri rješavanja nelinearnih jednadžbi
 - Wegsteinova metoda
 - metoda sekante

IV. MODELI I SIMULACIJE DINAMIČKIH SUSTAVA

1. Grafička simulacija dinamike (koncept prostora stanja)
2. Dinamički sustavi 1. i 2. reda
3. Primjeri modela dinamičkih sustava 1. i 2. reda
 - dinamika smrzavanja namirnica
 - dinamika fermentacije (model upravljanja)
 - dinamika toplinske sterilizacije

4. Matematičke metode za rješavanje sustava diferencijalnih jednažbi (s usredotočenim parametrima)

- Eulerova metoda
- Korigirana Eulerova metoda
- Runge-Kutta 2
- Runge-Kutta 4

V. LINEARNO PROGRAMIRANJE

1. Primjena linearnog programiranja
2. Simplex metoda
 - optimiranje sastava smjese sirovina
 - optimiranje sastava i cijene obroka
 - optimiranje iskorištenja rada strojeva/pogona
 - optimiranje transporta

PRIMJERI IZ STRUČNOG I ZNANSTVENOG RADA

1. Primjeri suradnje s gospodarstvom
2. Primjeri diplomskih radova
3. Primjeri iz znanstveno-istraživačkog rada

Seminari (PhI) - 15 sati

1. Metode za rješavanje (sustava) linearnih jednadžbi
(Stacionarna stanja kod kemijskih reakcija)

Direktne metode

- Gaussova eliminacija

Iterativne metode

- Jacobijeva (linearna) iteracija
- Gauss-Seidlova iteracija

2. Metode za rešavanje nelinearnih jednadžbi

(Stacionarna stanja kod enzimskih reakcija)

- Newton-Raphsonova iteracija
- Metoda tangente
- Metoda sekante
- Wegsteinova metoda

3. Metode za integriranje diferencijalnih jednažbi

(Dinamička stanja - pri regulaciji procesa)

- Eulerova metoda
- Korigirana Eulerova metoda
- Runge-Kutta 2
- Runge-Kutta 4

4. Metode linearnog programiranja

(Za optimiranje: (\leq), (\geq), ($=$), ($\leq \geq =$))

- Simplex metoda
- optimiranje sastava smjese sirovina
- optimiranje sastava i cijene obroka
- optimiranje iskorištenja rada strojeva/pogona
- optimiranje transporta

MS Excel

MS Quick Basic + MS DOSBox

LINDO

MS Word

Literatura

<http://www.ptfos.unios.hr/modeli>

- *prof. dr. sc. Damir Magdić* "Prezentacije i materijali s predavanja"
- *prof. dr. sc. Damir Magdić* "Skripta Numeričke metode"

Dodatna literatura:

- Gomzi. Z, Kurtanjek, Ž. Modeliranje u kemijskom inženjerstvu. Sveučilišni udžbenik, HDKI/FKIT Zagreb, 2019.
(*Poglavlje 1. Modeli i modeliranje, str. 1-127*)

I na kraju ...



Izvješća s računalnih vježbi:

E-mail + pisani oblik

Parcijalni ispiti (I. i II.):

tijekom semestra (po dva zadatka)

ili

ili

Pisani dio ispita:

3 zadatka - 90 minuta

Usmeni dio ispita:

tehnološki dio + numerička metoda

Studentima je omogućena izrada diplomski rada na sljedećim područjima:

- zajedničko rješavanje zadataka u pogonu ili laboratoriju
- optimiranje svojstava proizvoda i/ili procesnih parametara
- ne-destruktivne metode analize namirnica
- optimiranje receptura
- izrada matematičkih i/ili računalnih modela za primjere iz prehrambenog i procesnog inženjerstva
- rad na istraživačkim projektima

Upitnik o stilu učenja

B

I

U

↪

✕

Svrha ovoga upitnika je saznati preferencije za učenje koje neka skupina ispitanika ima.

Cilj je predmetnom nastavniku omogućiti upoznavanje s radnom skupinom i dati mu korisne informacije za pripremu nastavnih materijala prilagođenih skupini.

Dodatni cilj je informirati svakoga ispitanika o njegovim osobnim preferencijama i za učenje

Indeks stilova učenja je on-line instrument istraživanja koji koristi 44 a-b pitanja za procjenu preferencija ispitanika za četiri dimenzije modela stila učenja (prema Richard M. Felder i Barbara A. Soloman):

1. aktivni/refleksivni,
2. senzorski/intuitivni,
3. vizualni/verbalni i
4. sekvencijalni/globalni.

Svaki ispitanik će iz svojih rezultata saznati za njega najbolje načine učenja i razumijevanja novih informacija. Pojedinačni rezultati će ispitaniku biti poslani na adresu e-pošte koju ispitanik upiše na ovaj obrazac.

Anonimni rezultati za cijelu grupu bit će vidljivi svim ispitanicima koji popune anketu.



Skenirajte QR kod!



1. Matematičko modeliranje, optimiranje i upravljanje

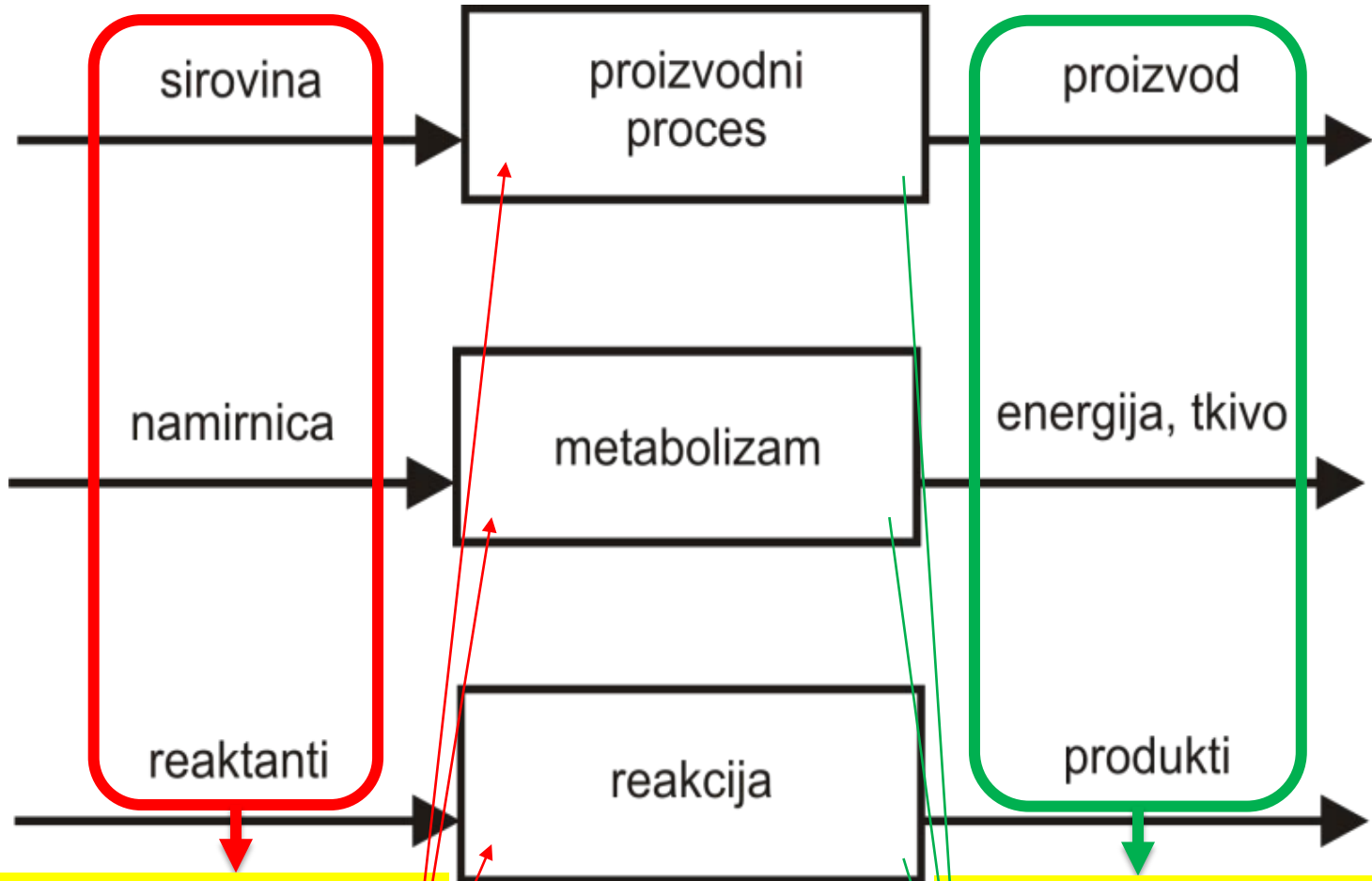
Uvod i definicije pojmova

Metodologija razvoja matematičkog modela

Podjela matematičkih modela

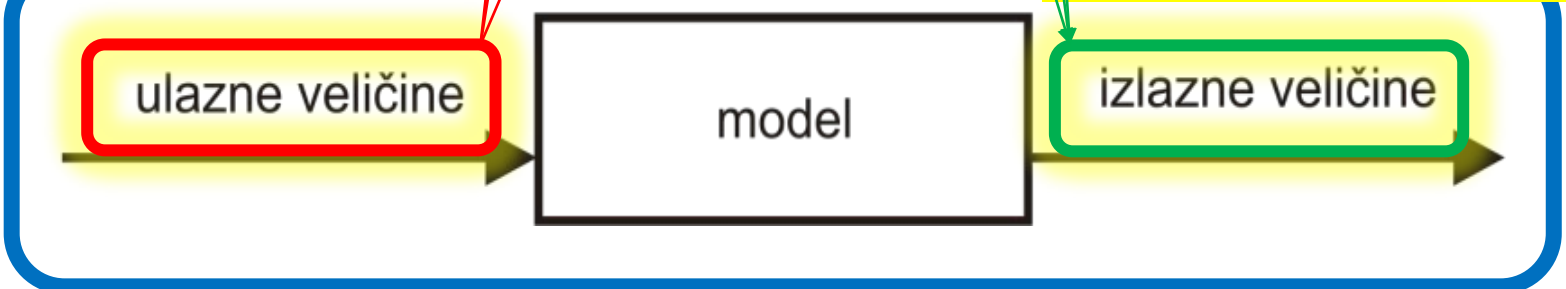
Numeričke metode

Računalni programi i simulacije



U modelima ih opisuju ulazne veličine.

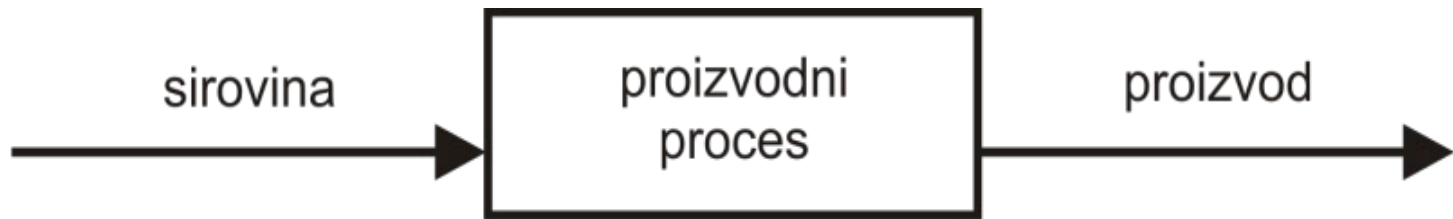
U modelima ih opisuju izlazne veličine.



Sirovina, namirnica i reaktant NISU ulazne veličine!!!

Proizvod, energija/tkivo, produkti NISU izlazne veličine!!!

Ulazne i izlazne veličine su mjerne veličine SI sustava!



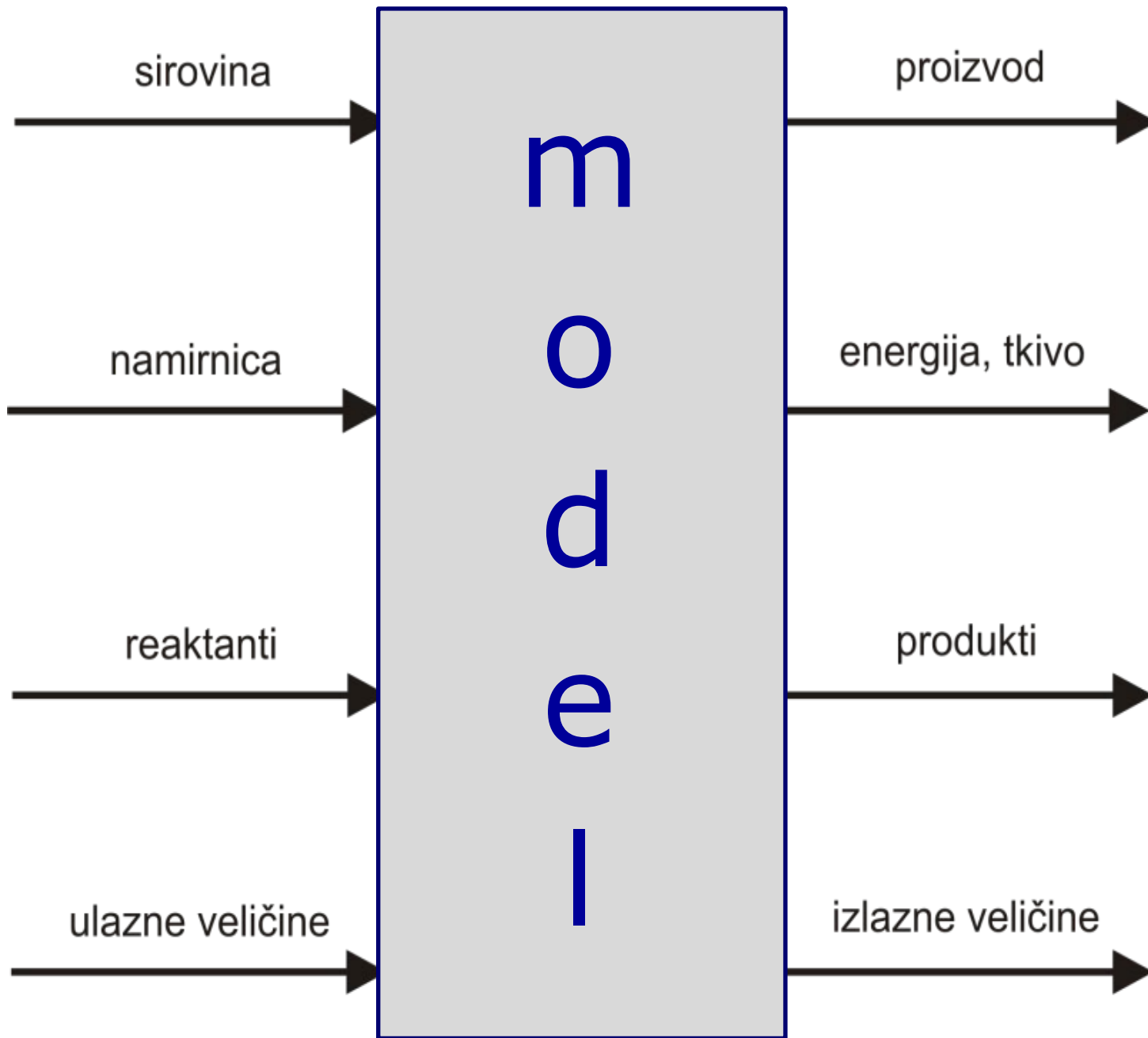
Sirovine su, npr.: mlijeko, brašno, voće, povrće, rijetki sok...

Sirovine su opisane sastavom i mjernim veličinama SI sustava (udio suhe tvari i vode, koncentracija neke tvari, masa, tvrdoća, čvrstoća, protok soka, temperatura soka, ...).

Ulazne veličine su mjerne veličine koje
opisuju sirovinu i početne uvjete u procesu.

Izlazne veličine su mjerne veličine koje
opisuju proizvod i izlazne uvjete u procesu.

sirovina	≠	ulazna veličina
namirnica	≠	ulazna veličina
reaktant	≠	ulazna veličina



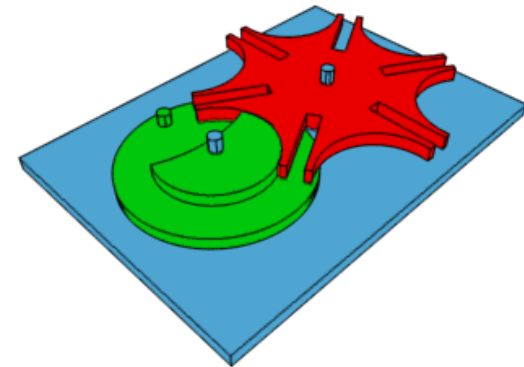
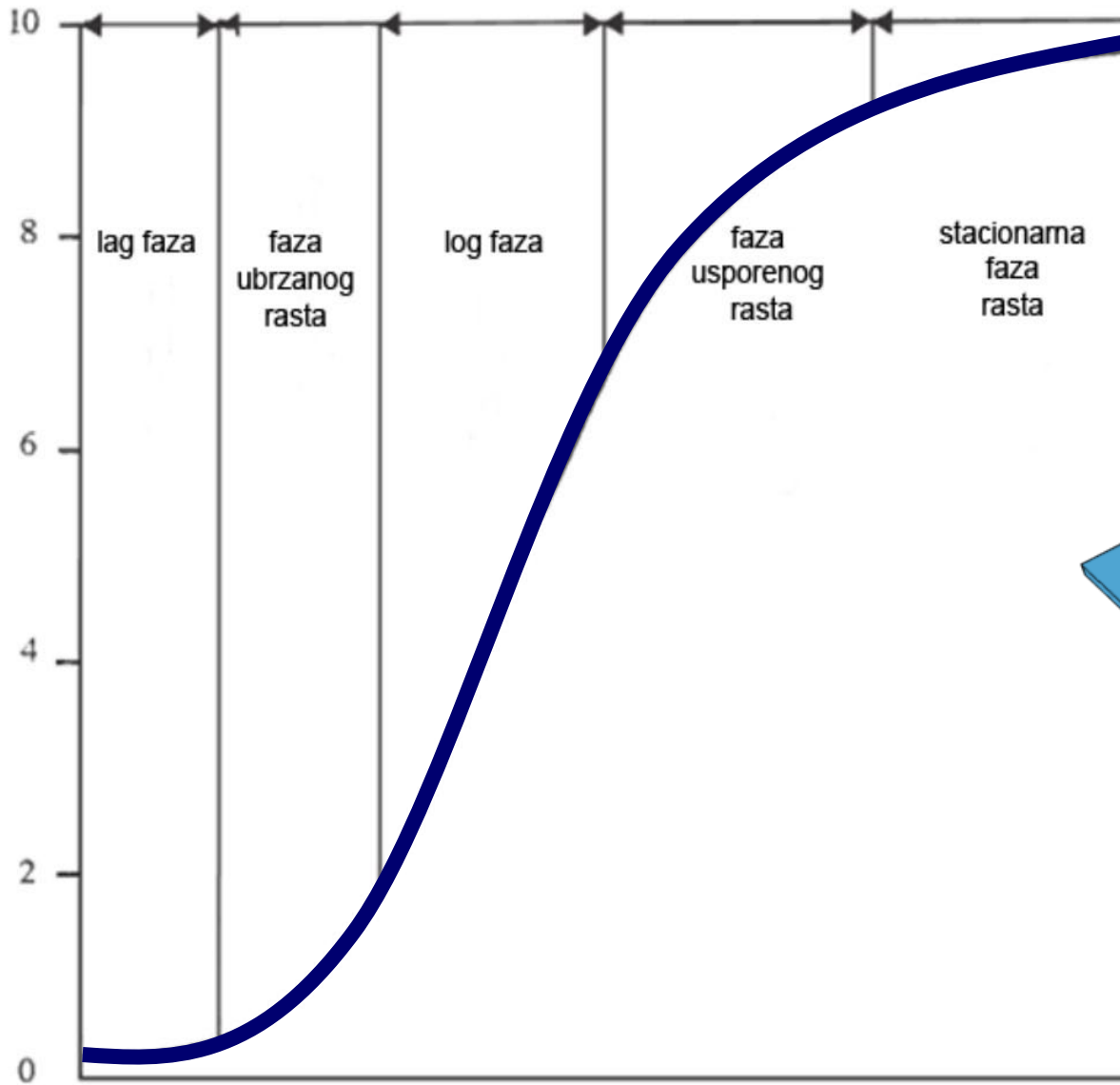


što je modeliranje ?

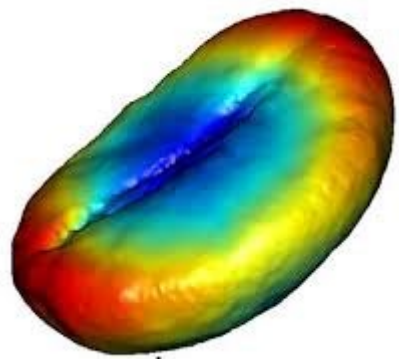
sjetite se nekih modela

što rade modeli ?

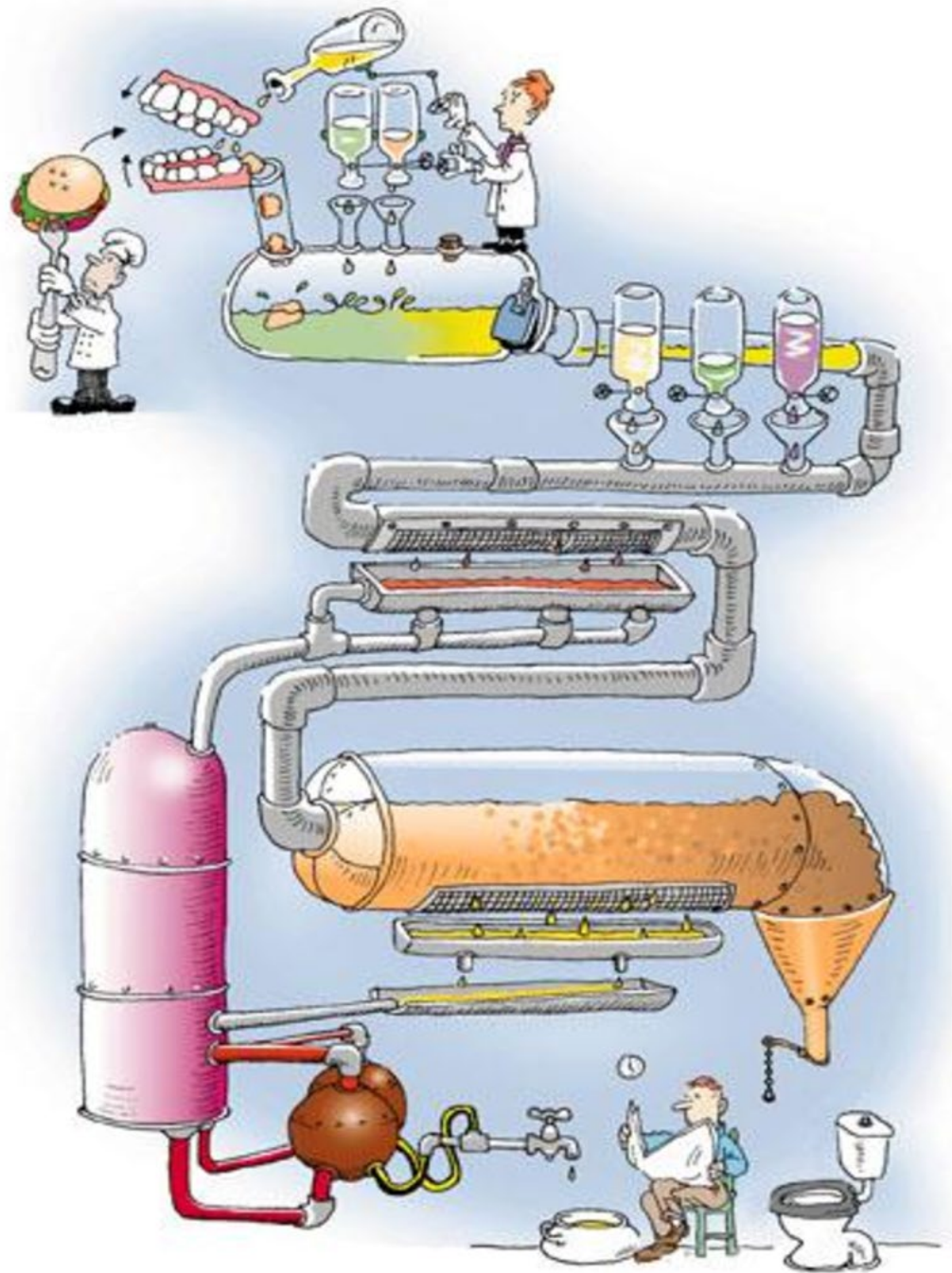
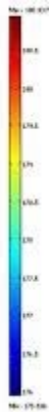
log N



vrijeme



b







(matematičko)

modeliranje,

optimiranje

i

(računalno)

upravljanje

u prehrambeno-tehnološkim procesima



- **Matematičko modeliranje procesa**



- **Računalno simuliranje procesa**



- **Analiziranje procesa**



- **Projektiranje procesa**



- **Upravljanje procesima**



- **Optimiranje procesa**



Kontrolna soba u prehrambeno-tehnološkim procesima

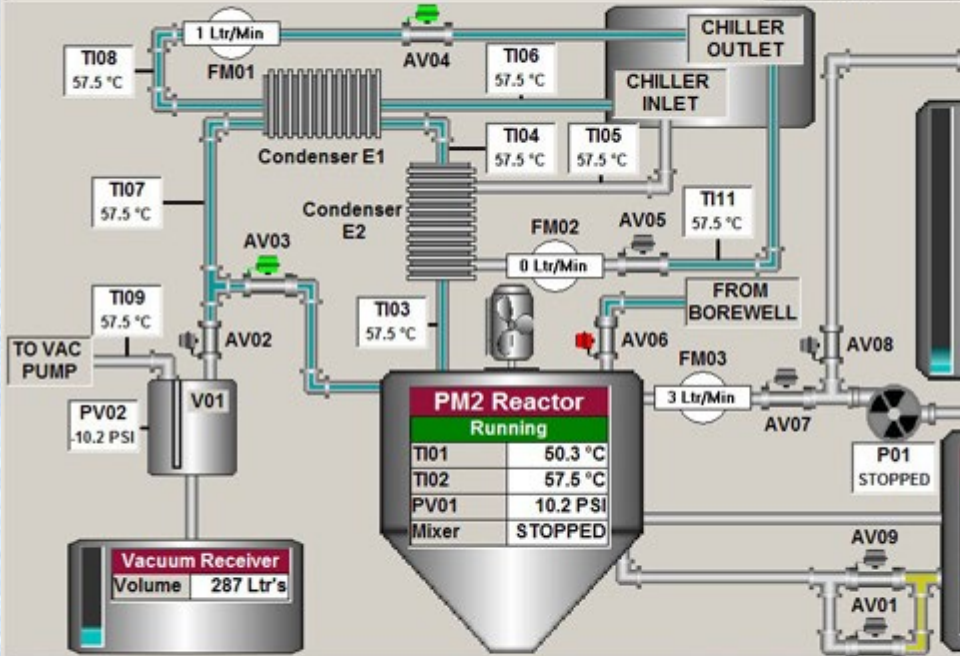


Za nadzor i upravljanje procesom



Vessel PM2

Batch ID
Product ID
Start Time




F7 System Alarms Page


KEPware.KEPServerEx.V4 - C327 Running Scan Time 0




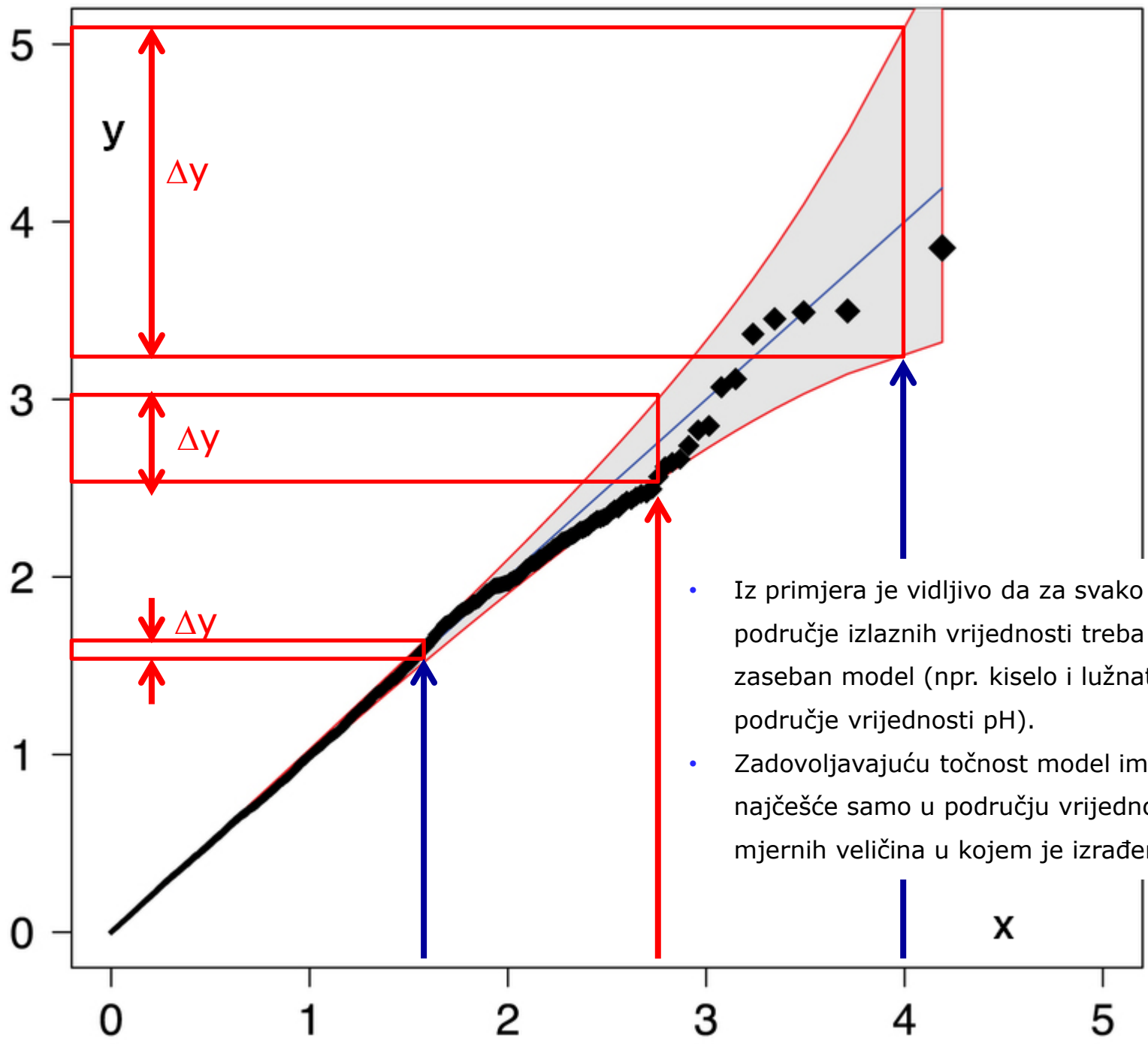
Uvod i definicije pojmova

- **Matematičko modeliranje**
- **postupak opisivanja odnosa** između varijabli i parametara u nekom sustavu uporabom matematičkih funkcija (jednadžbi)
- **matematički model povezuje ulazne (x) i izlazne (y) veličine** pomoću matematičkih izraza $y = f(x)$

- 
- matematička interpretacija odnosa između varijabli i parametara u nekom sustavu izrađena je **na temelju bilanci mase i energije**
 - zadovoljavajuću točnost model ima najčešće samo u području vrijednosti mjernih veličina u kojem je izrađen

- 
- **cilj modeliranja** je razviti i koristiti model za analiziranje, projektiranje, optimiranje i upravljanje sustava ili jednog njegovog dijela
 - odnosi među veličinama opisani su matematičkim jednadžbama koje se rješavaju matematičkim metodama

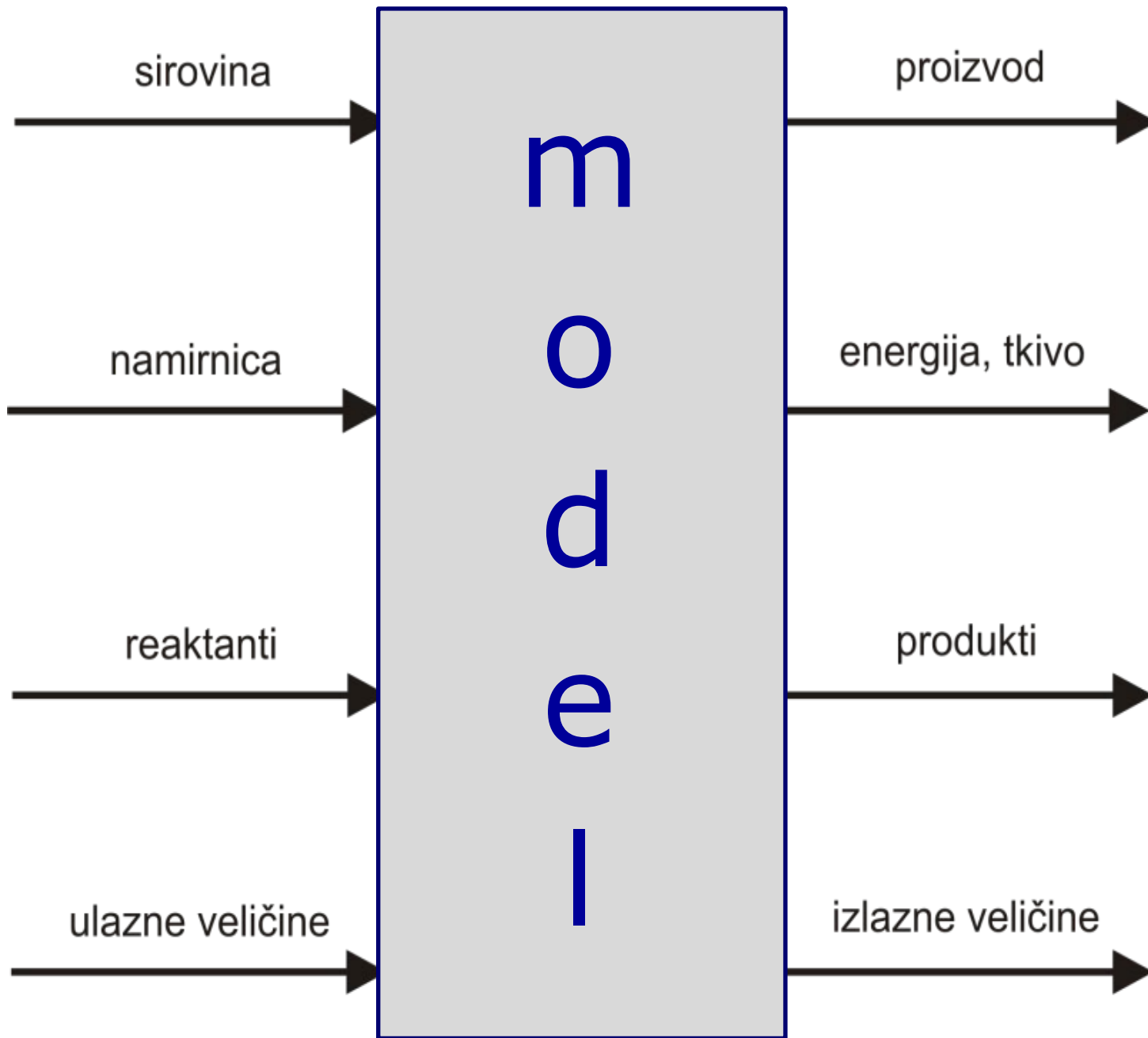
- 
- matematičko modeliranje je proces primjene matematike na realni sustav radi izračunavanja potrebnih informacija
 - modeliranje ne mora nužno riješiti problem, ali će ga vjerojatno rasvijetliti i pojasniti promatranu situaciju



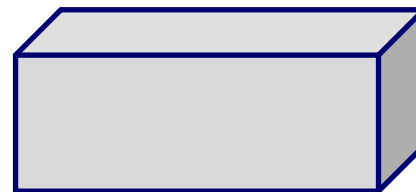
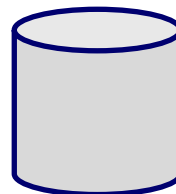
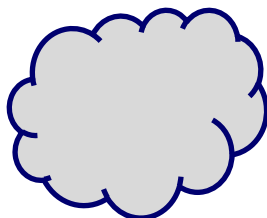
- Iz primjera je vidljivo da za svako područje izlaznih vrijednosti treba izraditi zaseban model (npr. kiselo i lužnato područje vrijednosti pH).
- Zadovoljavajuću točnost model ima najčešće samo u području vrijednosti mjernih veličina u kojem je izrađen.

- za vrijednosti koje su izvan analiziranog raspona potrebno je model prilagoditi (*eng. model adjustment*) ili izraditi novi
- realni i modelni sustavi imaju **ulaz, izlaz i sustav** u kojem se događa promjena



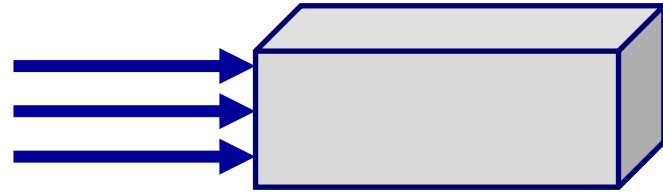


- **Sustav**



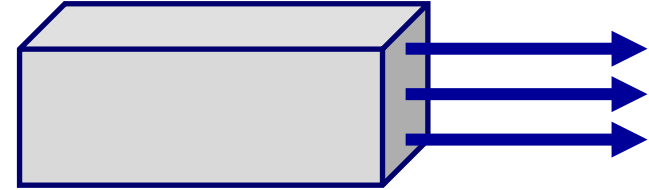
- apstraktna/zamišljena cjelina, za koju smatramo da nema interakcija s okolinom nego je izolirana i egzistira kao nezavisna
- definiran matematičkim relacijama između ulaznih i izlaznih veličina

- **Ulazne veličine**





- poznate su nam u procesu ili modelu i njihovu vrijednost zadajemo na početku procesa ili postupka modeliranja
- u pravilu ne ovise o događajima u procesu ili modelu pa su one **nezavisne veličine**
- *kod sustava s povratnom vezom mogu postati zavisne jer zavise o izlazu iz procesa*

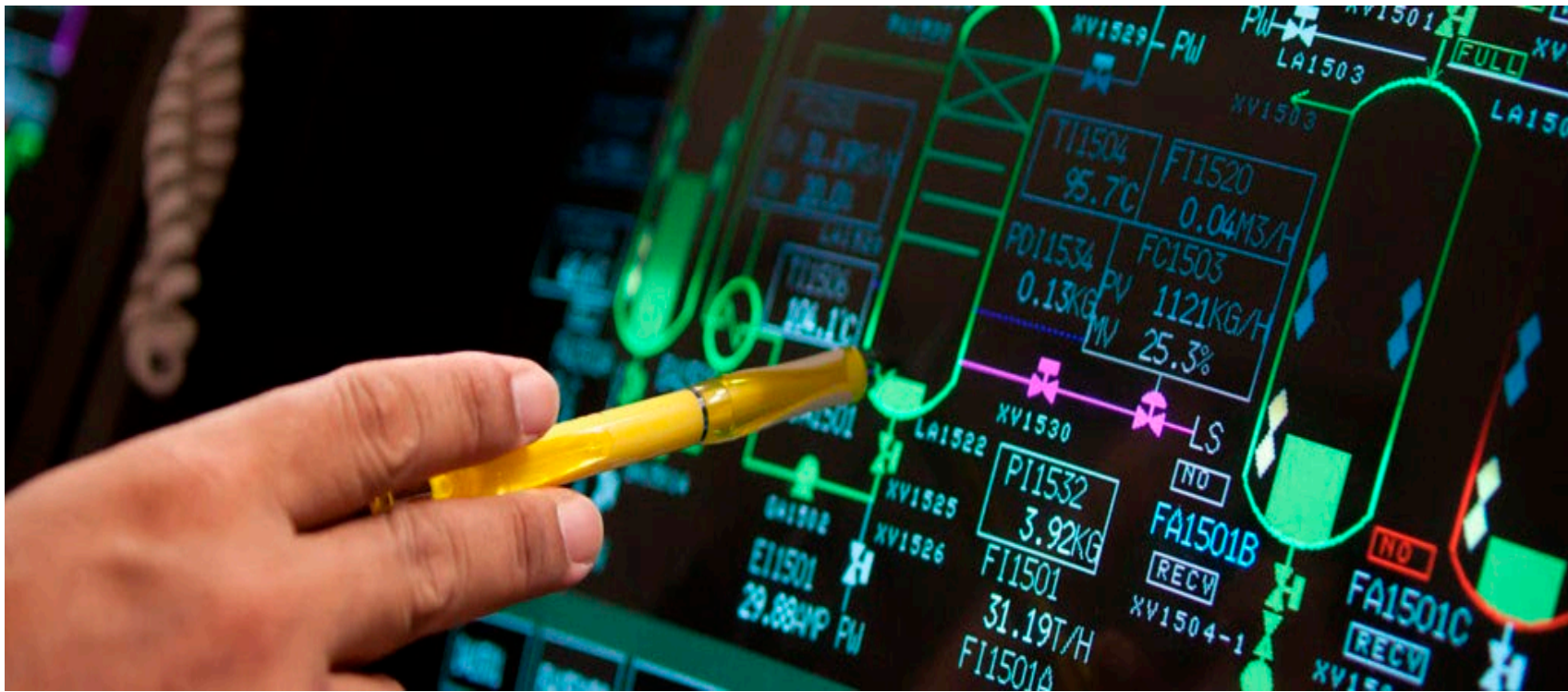
- **Izlazne veličine**





- dobivaju neku poznatu vrijednost tek nakon provedbe procesa ili modeliranja
- zavise o događajima u procesu ili modelu pa kažemo da su **zavisne veličine**


- 
- **Računalna simulacija**
 - **računalni program** izrađen na temelju matematičkih modela
 - omogućuje oponašanje nekog sustava na brz i jeftin način
 - simulacije imaju i korisničko sučelje koje vizualizira sustav ili proces

- 
- **Upravljanje procesom**
 - **ciljano vođenje procesa** pri kojemu se krajnji cilj postiže namjernim i planiranim promjenama ulaznih veličina
 - na temelju iskustva ili modela i simulacija određuju se ulazne vrijednosti za upravljanje procesom




- 
- **Optimiranje**
 - **postupak ponavljanja** (probnog) vođenja procesa, modela ili simulacije, kojemu je **svrha ostvariti najmanje troškove, najvišu dobit, najveću količinu, svojstva kakvoće ili drugo.**
 - izbor matematičke ili statističke metode za optimiranje ovisi o procesu i njegovim svojstvima

- 
- **Svrha matematičkih modela i simulacija**
 - omogućuju brži, lakši i jeftiniji uvid u utjecaj ulaznih vrijednosti na ishode procesa
 - skraćuju vrijeme potrebno za određivanje optimalnih uvjeta za upravljanje

- 
- - izbor optimalne lokacije tvornice,
 - - optimalno planiranje investicijskih ulaganja,
 - - optimiranje proizvodnih programa i povećanje dobiti,
 - - optimalno razmještanje strojeva,
 - - optimiranje postojećih tehnoloških postupaka,
 - - izbor optimalnih tehnoloških postupaka,
 - - analiza i poboljšanje rada uređaja i procesa,
 - - projektiranje boljih uređaja i procesa,
 - - optimiranje sastava smjese i smanjenje troškova,
 - - optimiranje plana prehrane,
 - - optimiranje jelovnika,
 - - optimiranje transporta ...

- **Stacionarno stanje procesa**
- pojava kada se tijekom odvijanja nekog procesa **ulazne i izlazne vrijednosti** ustale i **zadržavaju stalne/konstantne vrijednosti**
- vrijednosti ulaznih i izlaznih veličina međusobno se razlikuju, ali ostaju nepromijenjene u procesu pa pišemo da je njihova **derivacija ili promjena tijekom vremena jednaka nuli:**

$$\frac{d}{dt}(x, y) = 0$$

- 
- upravljanje procesima u stacionarnom stanju je znatno lakše od upravljanja dinamičkim procesima
 - varijable postaju "*konstante*" i ponašaju se kao parametri
 - postizanje stalnih vrijednosti olakšava upravljanje i nadzor procesa

- **Dinamička stanja procesa**
- zbog brojnih razloga vrijednosti varijabli mijenjaju se tijekom procesa, pa su u praksi znatno češća dinamička stanja procesa
- za takve procese pišemo da je derivacija ili promjena vrijednosti ulaznih i izlaznih veličina tijekom vremena različita od nule:


$$\frac{d}{dt}(x, y) \neq 0$$

- procesi i modeli imaju ulazne i izlazne vrijednosti od kojih su neke stalne, a neke promjenjive
- veličine sa stalnim vrijednostima su **parametri**

(stalnica ili konstanta \neq parametar)

*Konstante su: π , brzina zvuka,
gravitacijska sila,
opća plinska konstanta i sl.*

- promjenjive veličine su **varijable**

- 
- smanjenjem broja varijabli model se pojednostavljuje ali se smanjuje i njegova točnost
 - povećanjem broja varijabli modeli postaju složeniji i često ne daju rješenja
 - izbor varijabli kojima ćemo pretpostaviti stalnu vrijednost u modelu vrši se na temelju iskustva i utjecaja pojedine veličine na sam ishod procesa

- PRIMJER:
- male promjene volumena uređaja nemaju značajniji utjecaj na brzinu reakcije koja se u njima odvija
- za volumen (unutar malih raspona) možemo pretpostaviti stalnu vrijednost i u modelu ga učiniti parametrom (pišemo $V=\text{konst.}$)

- pri ponavljanju simulacija, pretpostavljene stalne vrijednosti nekih veličina, u sljedećoj simulaciji mogu dobiti novu stalnu vrijednost
- PRIMJER:
- za iste varijable: 10 simulacija za različite vrijednosti $V=(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) \text{ m}^3$
- identičan postupak se primjenjuje u svim simulacijama
- posebno je važan pri prenošenju procesa iz laboratorijskog mjerila ili tzv. pilot postrojenja u realne uvjete

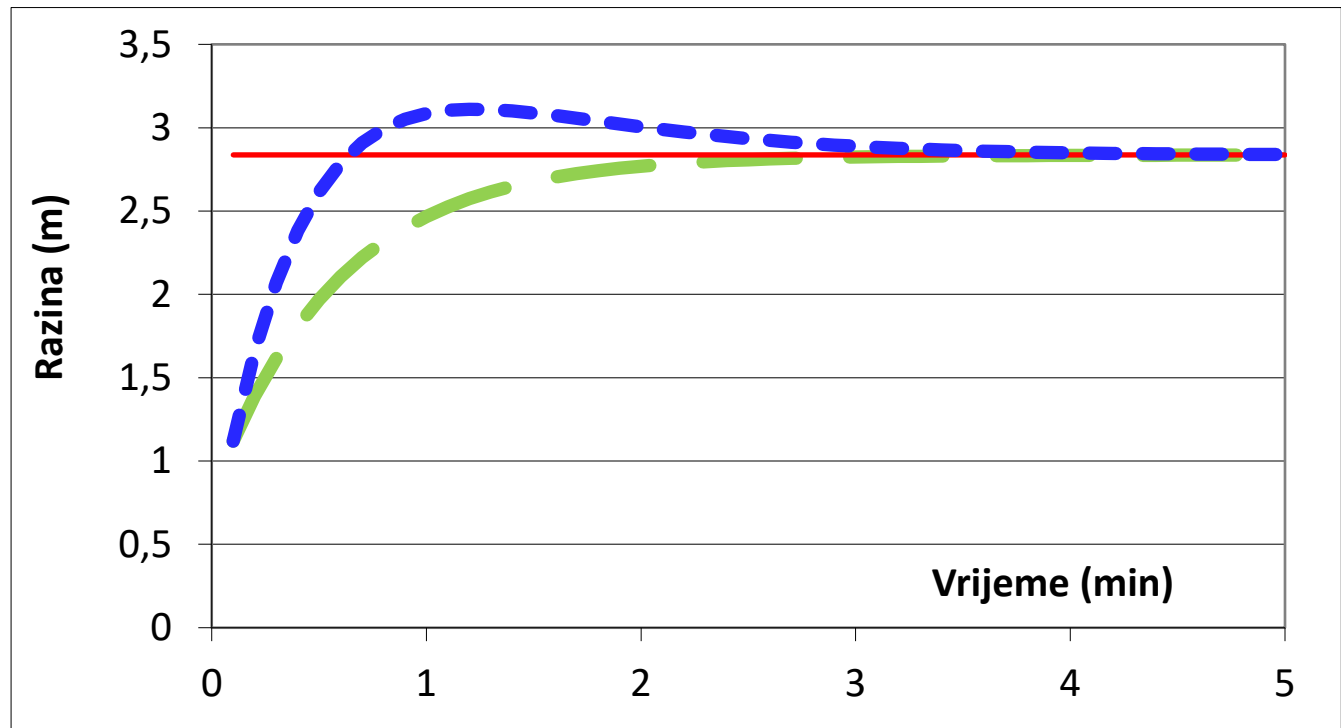
- varijable u modelu predstavljaju neka svojstva materijala, ambalaže, uređaja ili procesa
- varijable u modelima prehrambeno-tehnoloških procesa mogu biti:
temperatura, tlak, protok, udio suhe tvari, koncentracija tvari, viskozitet, gustoća i dr.
($T, p, q, x_{st}, c_A, \mu, \rho$)

- varijable u nutricionističkim modelima mogu biti koncentracije ili udjeli nutrijenata, starosna dob, zdravstveno stanje klijenta i dr.
- parametri ili stalne vrijednosti u takvim modelima najčešće su starosna dob klijenta, preporučeni dnevni unosi nekog nutrijenta ili tzv. RDA vrijednosti (*eng. Recommended Daily Allowance*) i dr.
- primjeri ?

- uobičajeni **način prikazivanja promjena varijabli** tijekom procesa je na "varijabla-vrijeme" grafu gdje se na apscisnoj osi prikazuju jedinice vremena, a na ordinatnoj osi vrijednosti varijable (T-t, q-t, h-t, c-t,...)
- za prikaz promjene varijable kod kontinuiranih modela koristi se **krivulja ili pravac**
- kod diskontinuiranih ili šaržnih modela za prikaz vrijednosti koristi se **histogram ili stupčasti grafikon**

- primjeri

- Ako je potrebno prikazati promjenu razine kapljevine u spremniku, pravilno je koristiti **krivulju** jer razina u svakom trenutku ima neku točnu vrijednost i neprekidna je promjena tijekom vremena.



- procesne veličine čije su vrijednosti poznate tijekom procesa i koriste se za simulaciju su **varijable stanja** (*ulazne i izlazne varijable*)
- *to su one mjerne veličine koje nam opisuju stanje namirnice koju proizvodimo i/ili procesnu veličinu koja je važna za proizvod*
- *npr. temperatura ugušćenog soka i udio suhe tvari u njemu tijekom procesa koncentriranja rijetkog soka uparavanjem*

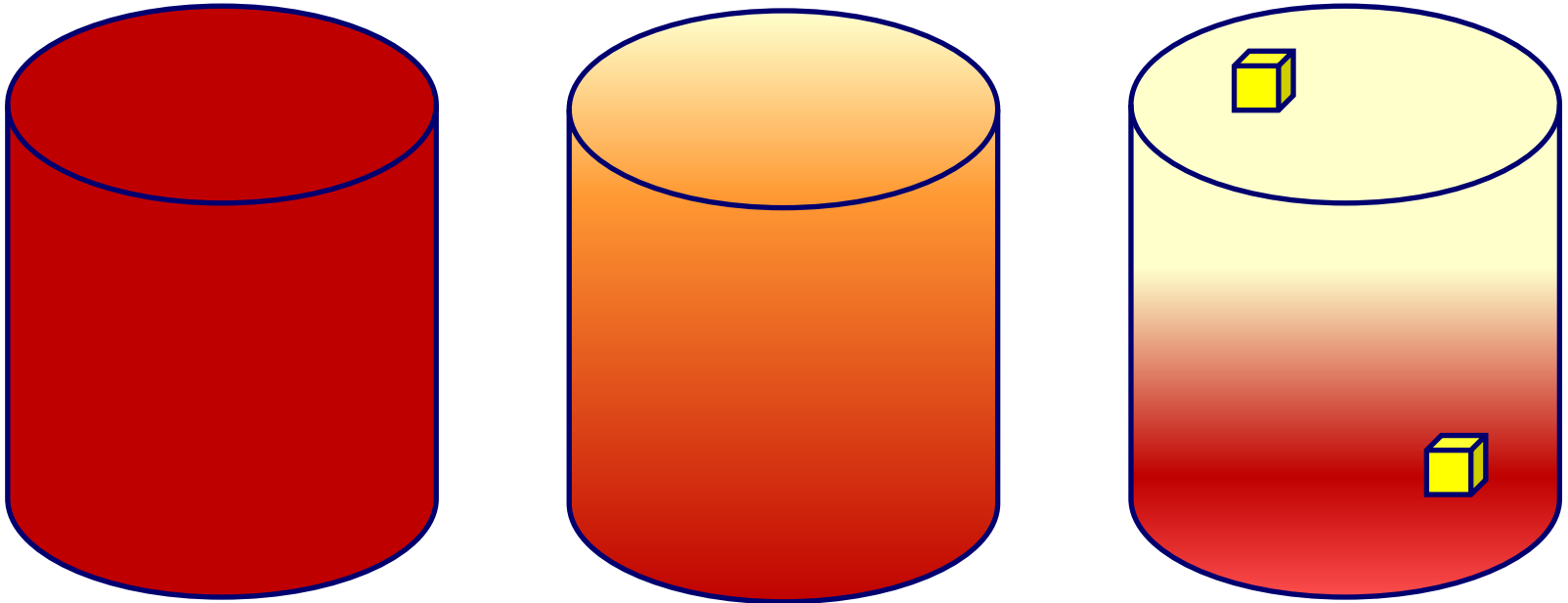
- kada se veličine u procesu mijenjaju bez našeg znanja i kontrole kažemo da su **slučajne varijable**

Primjeri:

- *masa automobila tijekom putovanja smanjuje se zbog sve manje goriva u spremniku*
- *masa proizvoda tijekom stajanja smanjuje se zbog sušenja proizvoda*
- *volumen kapljevine tijekom kuhanja u posudi smanjuje se zbog isparavanja vode*

PRIMJER SLUČAJNE VARIJABLE:

- pretpostavljamo da je udio suhe tvari jednak u svakom dijelu volumena kapljevine



- zbog taloženja otopljene tvari u otopini, nakon nekog vremena udio suhe tvari može biti manji na vrhu, a veći na dnu spremnika

- procesi i modeli najčešće imaju više ulaznih i izlaznih veličina
- u modelima ih uobičajeno predstavljamo **vektorima** koji ih objedinjuju
- za ulazne veličine koristimo oznaku „ \vec{x} ” i kažemo da je to vektor ulaznih veličina ili kraće „**vektor x**” $\vec{x} = (Qs, Ts, xs)$
- za izlazne veličine koristimo oznaku „ \vec{y} ” i kažemo da je to vektor izlaznih veličina i zovemo ga „**vektor y**” $\vec{y} = (Qk, Tk, xk)$

Vektori

\neq

Srednja
vrijednost

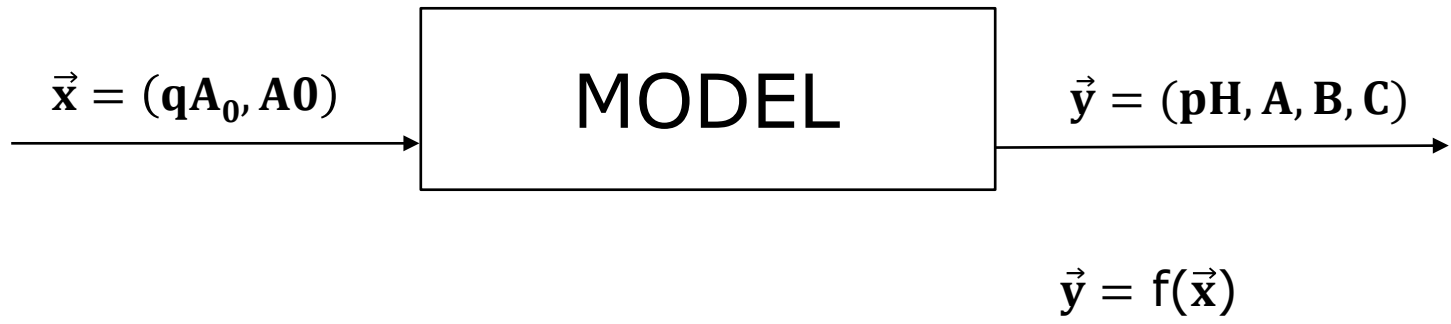
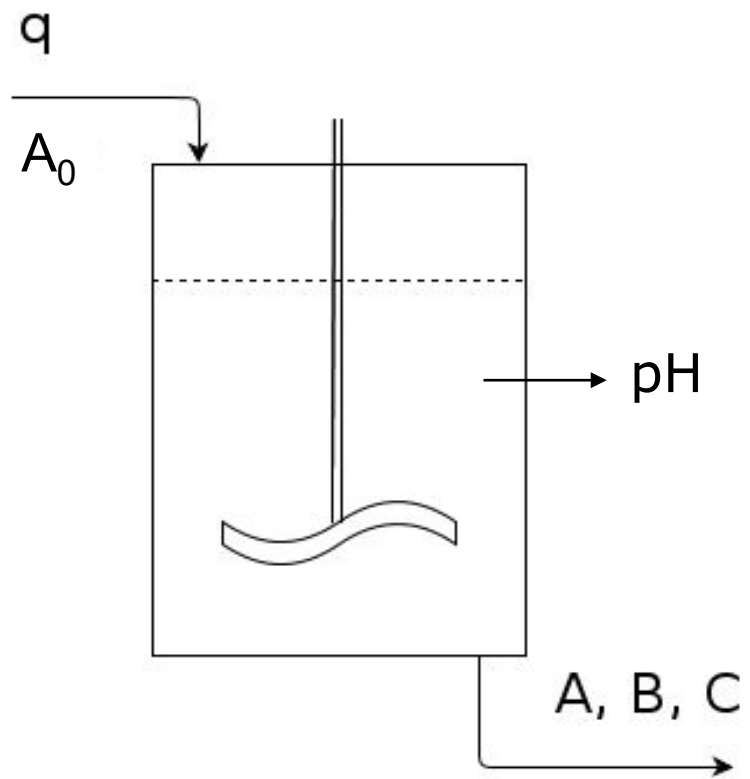
Usporedba
vektora

Usporedba
srednjih
vrijednosti

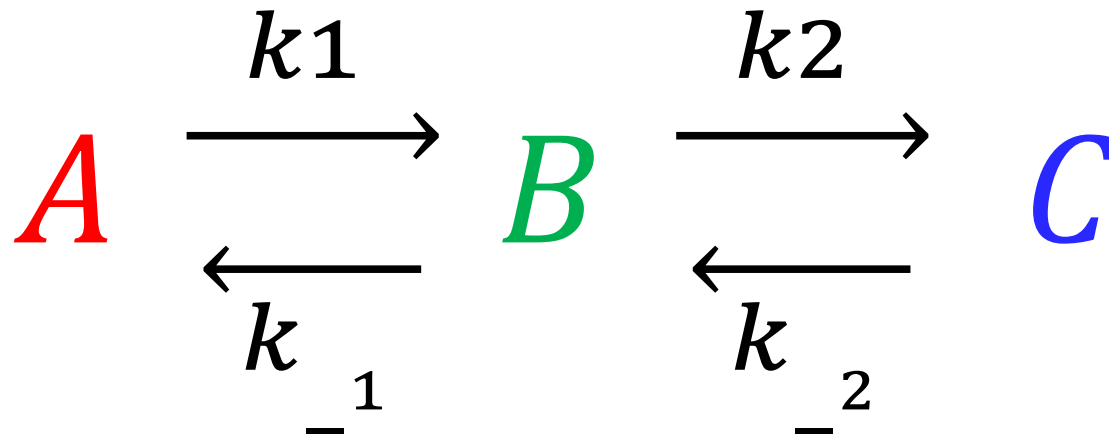
S istim
mjernim
veličinama

S različitim
mjernim
veličinama

- PRIMJER:
- vektor ulaznih veličina iz modela kemijskih reakcija može predstavljati ulazni protok koncentracija reaktanata A i B u reaktor
- tada su npr. elementi vektora $\vec{x} = (qA_0, A_0)$ ili $\vec{x} = (qB_0, B_0)$ ili oboje $\vec{x} = (qA_0, A_0, qB_0, B_0)$.
- izlazne veličine iz ovog modela mogle bi biti kiselost otopine i koncentracije produkata A, B i C pa su elementi vektora $\vec{y} = (pH, A, B, C)$



- PRIMJER:
- slijedni reakcijski mehanizam povratnih (reverzibilnih) kemijskih reakcija



- reakcija se događa u protočnom kemijskom reaktoru
- promjene koncentracija prikazujemo bilancama

- bilance mase **reaktanta** A $D=q/V$

$$\frac{d}{dt}A = D \cdot A_0 - D \cdot A - k_1 \cdot A + k_{-1} \cdot B$$

- **međuprodukta** B

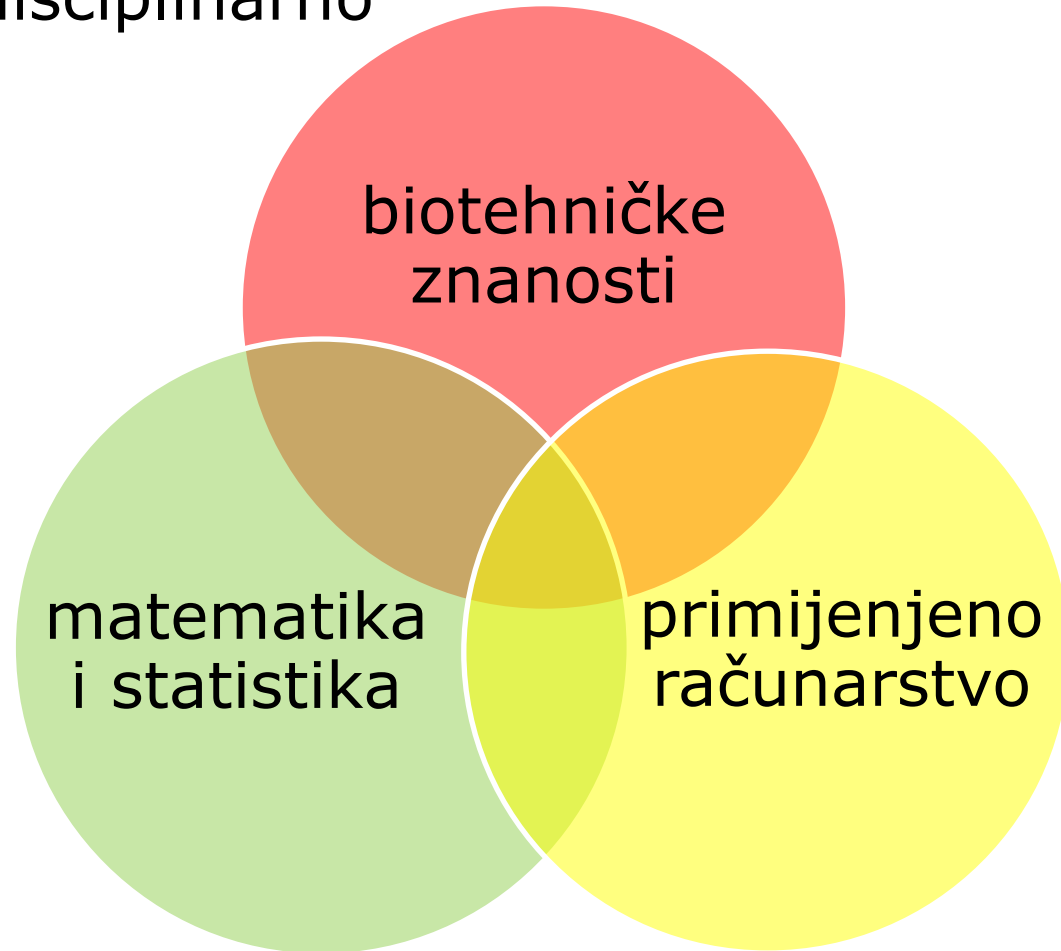
$$\frac{d}{dt}B = -D \cdot B + k_1 \cdot A + k_{-1} \cdot B - k_2 \cdot B + k_{-2} \cdot C$$

- **produkta** C

$$\frac{d}{dt}C = -D \cdot C + k_2 \cdot B - k_{-2} \cdot C$$

- gdje je A_0 koncentracija reaktanta A na početku reakcije, a D je razrjeđenje (omjer protoka i volumena)

- područje modeliranja i upravljanja u prehrambeno-tehnološkim procesima je multidisciplinarno





biotehničke znanosti

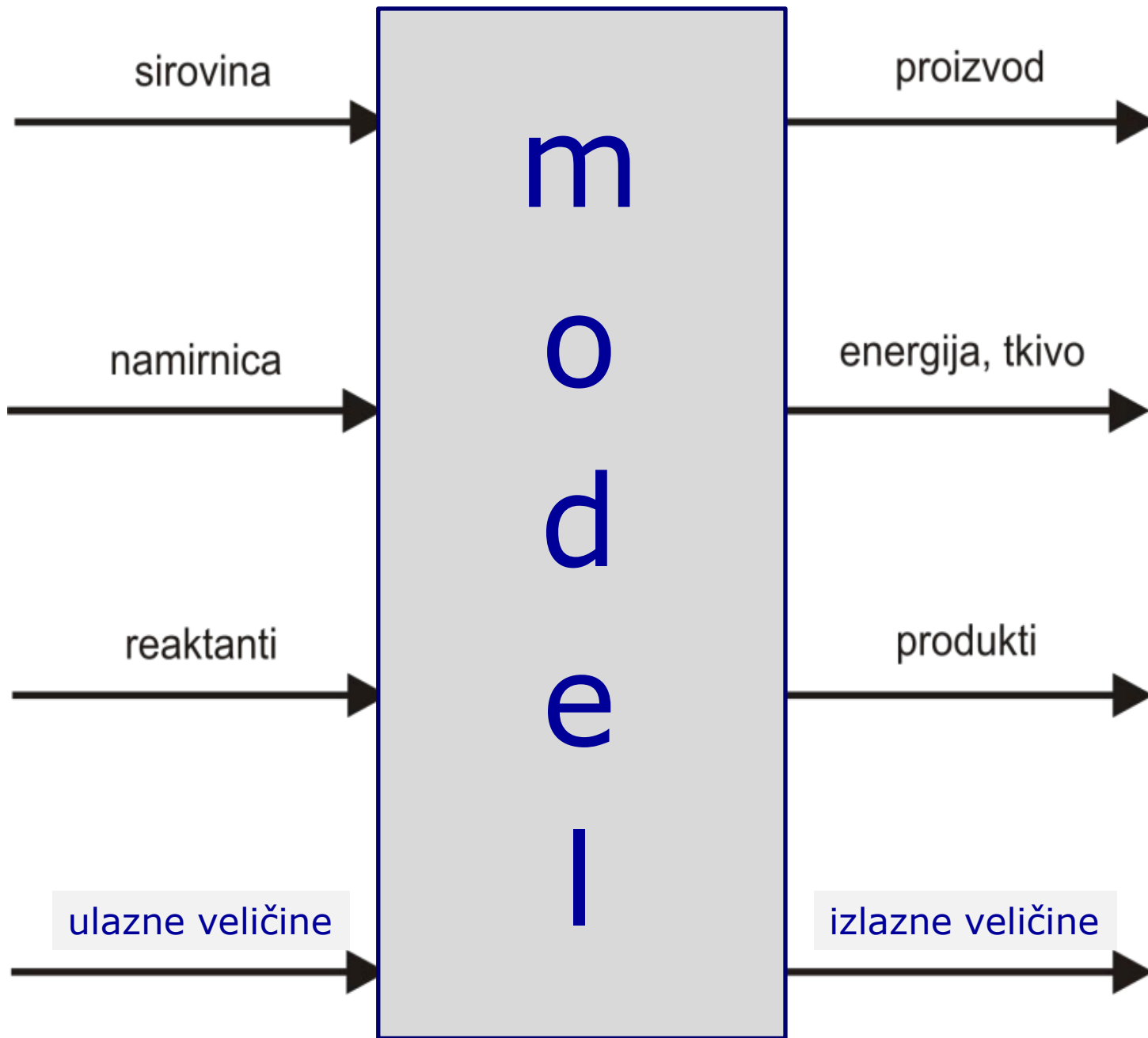
termodinamika, tehnička fizika, različite kemije, prijenos tvari i energije, procesi i mikrobiologija, mjerenje i upravljanje,...

matematika i statistika

matematičke i statističke metode

primijenjeno računarstvo

tablični kalkulatori, tekst procesori, web pretraživači, baze podataka, programiranje,...





1. Matematičko modeliranje, optimiranje i upravljanje

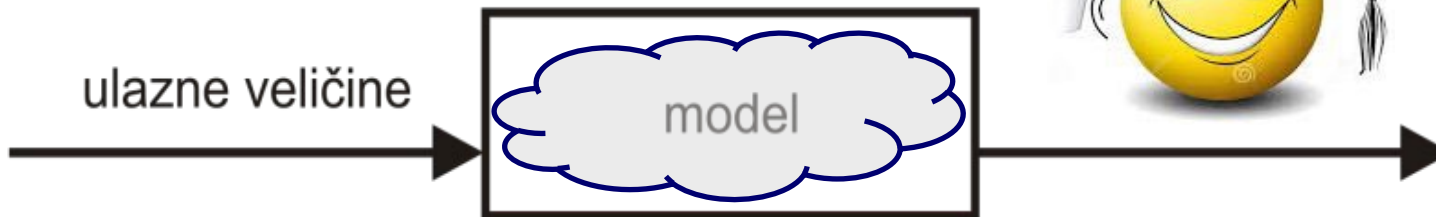
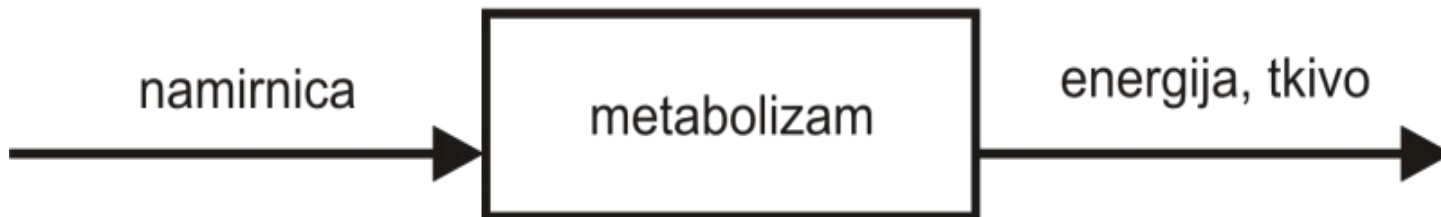
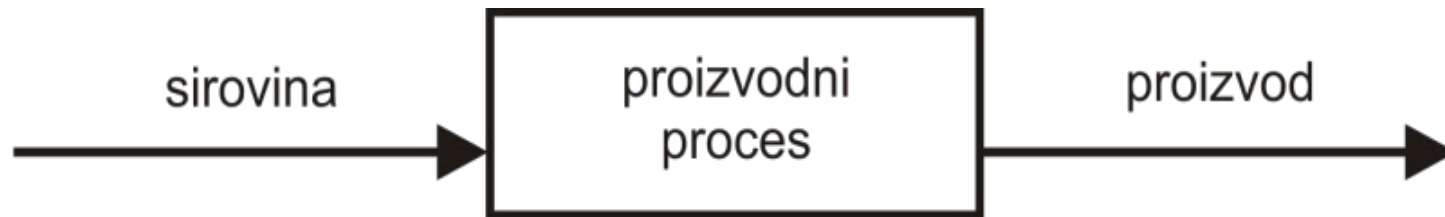
Uvod i definicije pojmova

Metodologija razvoja matematičkog modela

Podjela matematičkih modela

Numeričke metode

Računalni programi i simulacije

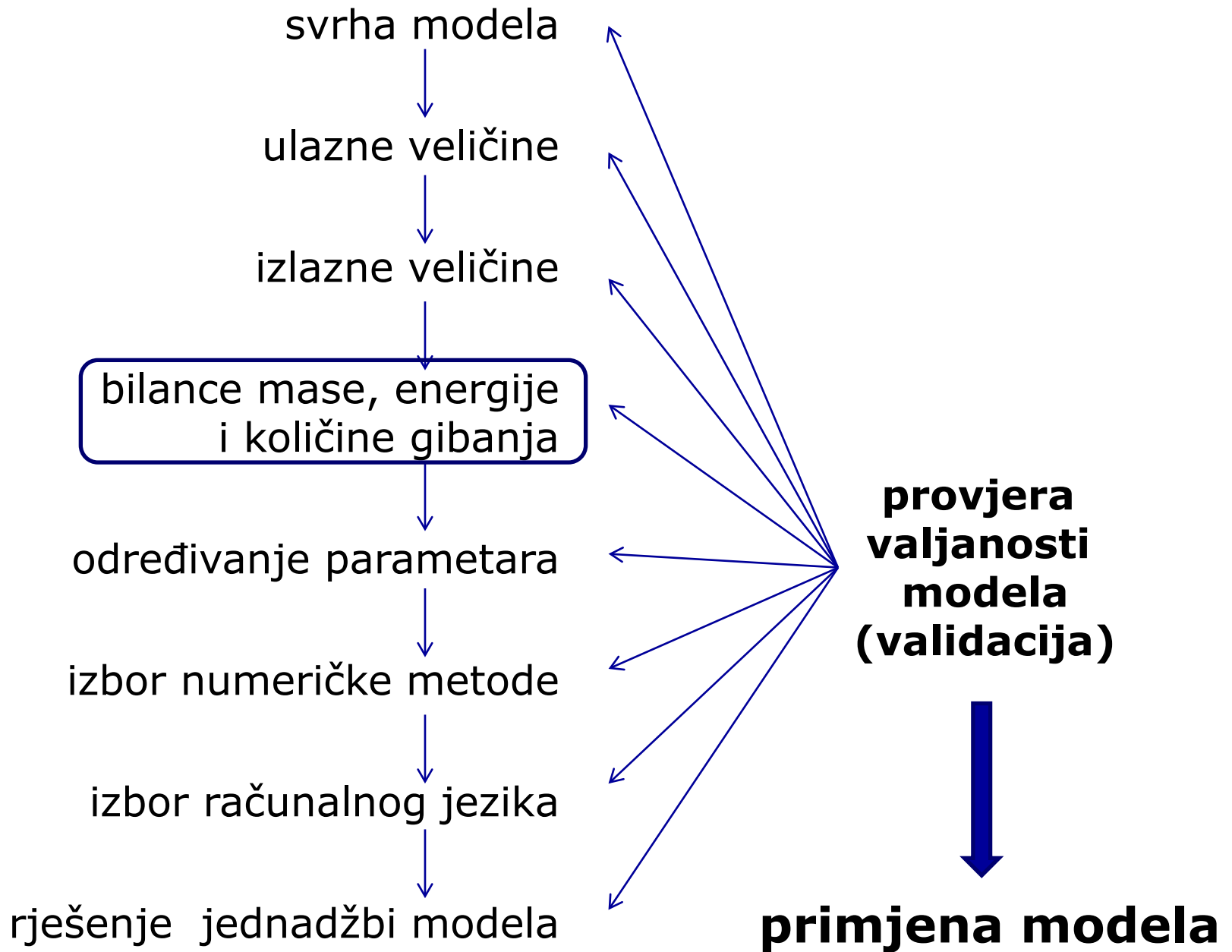


Principi razvoja matematičkog modela

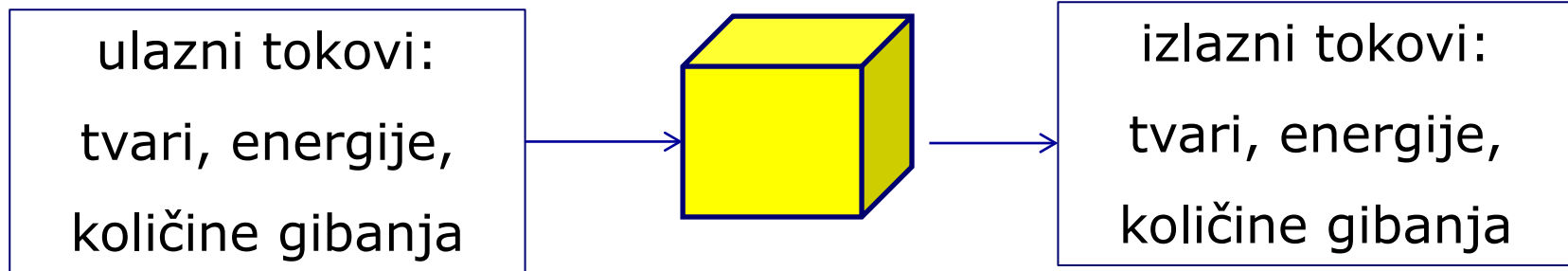
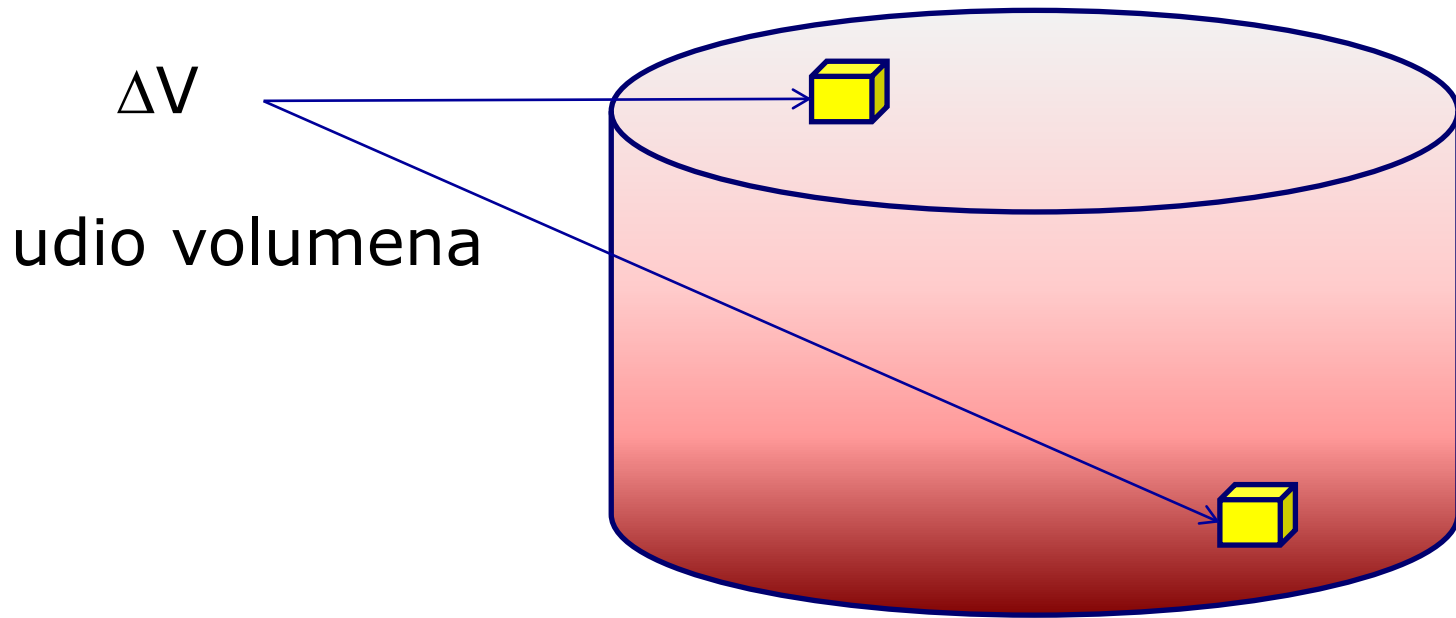
- 1) Imenovanje varijabli koje opisuju proces
(njihove vrijednosti mogu biti poznate ili nepoznate)
- 2) Opisivanje odnosa između varijabli
(određeni su fizikalnim zakonima, intuicijom, iskustvom,...)
- 3) Procjena utjecaja pretpostavki na odnos među varijablama
- 4) Opisno rješenje zadatka
(mora biti razumljivo kao i opis procesa)
- 5) Izbor matematičkih i računalnih alata
- 6) Validacija modela

Metodologija razvoja matematičkog modela



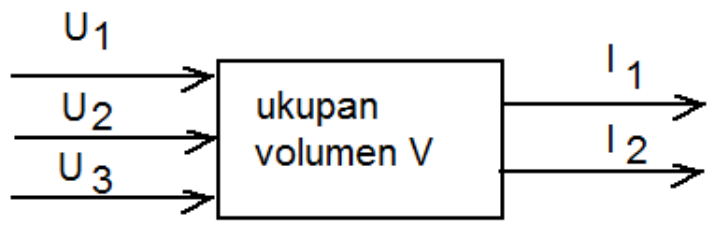
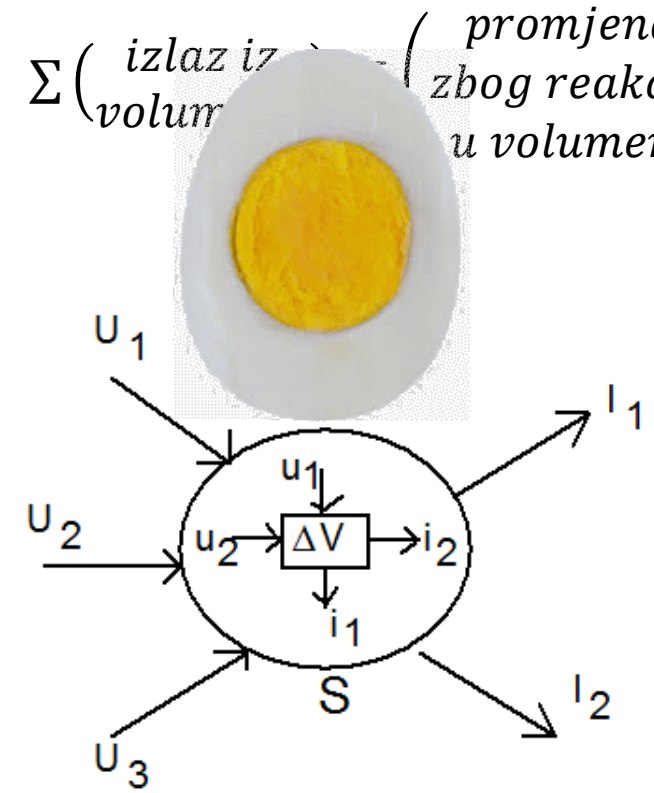
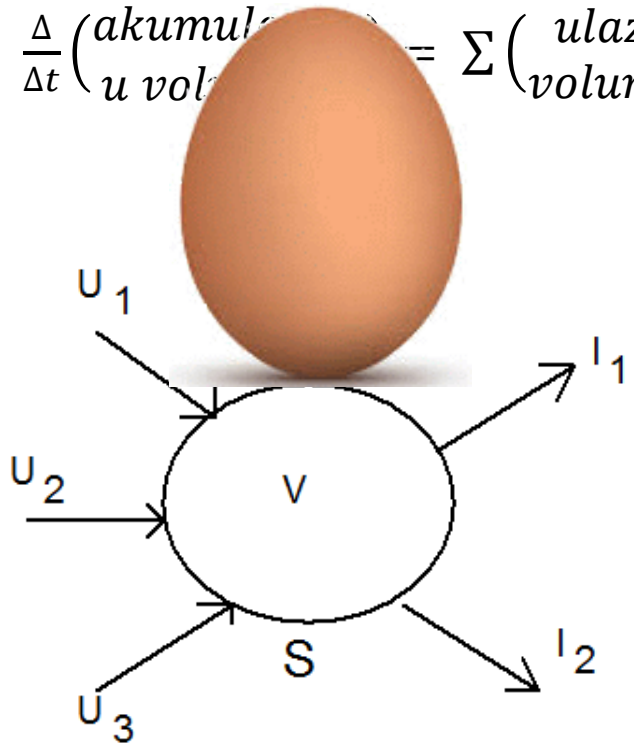


Opći princip izvođenja bilanci

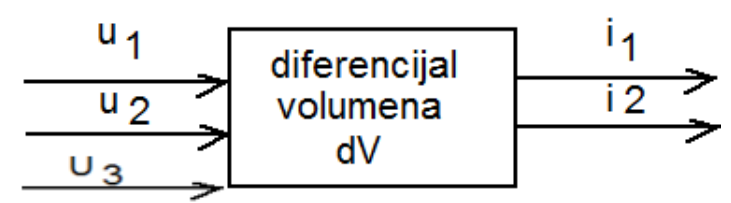


- u bilanci mase sastojka predznak (+) dolazi u slučaju kada je tvar produkt reakcije, a predznak (-) kada je tvar reaktant i u reakciji se troši
- u bilanci energije predznak (+) dolazi kada je reakcija egzotermna i stvara energiju, a predznak (-) kada je reakcija endotermna i treba joj dovoditi energiju
- oznaka Δ (grč. *delta*) označava malu ali konačnu promjenu
- **t** je oznaka za vrijeme
- Δt je mala konačna promjena vremena
- ΔS je mala konačna promjena akumulacije (sadržaja S)

- $$\frac{\Delta}{\Delta t} (\text{akumulacija u volumenu}) = \sum (\text{ulaz u volumen}) - \sum (\text{izlaz iz volumena}) + (\text{promjena zbog reakcije u volumenu})$$



U, I su ulazni i izlazni tokovi za ukupan volumen



u, i su ulazni i izlazni tokovi za diferencijal volumena

- modeli se razlikuju prema volumenu za koji se postavlja bilanca
- modeli s **usredotočenim ili koncentriranim** veličinama stanja = **ukupan volumen u kojem se odvija proces** (primjer: biokemijski reaktor)
- modelu s **raspodijeljenim ili distribuiranim** veličinama stanja = **samo dio cijelog volumena** (primjer: samo vanjski dio namirnice)
- modeli s usredotočenim veličinama stanja postaju sustavi običnih diferencijalnih jednažbi
- modeli s raspodijeljenim veličinama stanja postaju sustavi parcijalnih diferencijalnih jednažbi

- bilance postaju diferencijalne jednačbe kada se provede granični postupak u kojem konačne razlike/diferencije (Δ) postaju infinitezimalne veličine (diferencijali, $\Delta \rightarrow d$)

[Infinitezimalno = beskonačno malo da bi moglo biti izmjereno ili izračunato, zajednički naziv za diferencijalno i integralno računanje]

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \left(\frac{\Delta A}{\Delta t} \right) = \frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} A$$

- PRIMJER: bilance mase reaktanta A

$$\frac{d}{dt} A = D \cdot A_0 - D \cdot A - k_1 \cdot A + k_{-1} \cdot B$$



1. Matematičko modeliranje, Optimiranje i upravljanje

Uvod i definicije pojmova
Metodologija razvoja matematičkog modela
Podjela matematičkih modela
Numeričke metode
Računalni programi i simulacije

ANALITIČKI MODELI

IZRAČUNAVAJU KONKRETNA RJEŠENJA

*izvedeni su iz temeljnih zakona
fizike, kemije i biologije*

NEANALITIČKI MODELI

DAJU INFORMACIJE O ODNOSIMA x i y

- Regresijski
- Neuronske mreže
- Neizražena logika
- Ekspertni sustavi

Analitički modeli mogu biti **deterministički ili stohastički**.

Deterministički algoritam

U bilo kojim uvjetima **za isti unos izračunava isto rješenje**, izvodeći svaki put identičan niz naredbi.

Stohastički algoritam

U najmanje jednom dijelu izvršavanja **donese neku odluku slučajnim odabirom**.

Klasifikacija analitičkih modela

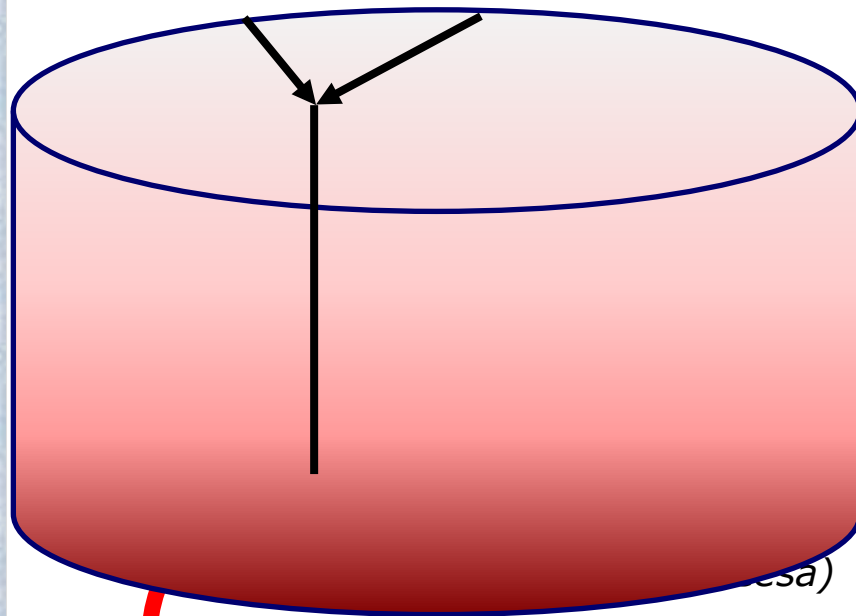
Deterministički $y=f(t)$

Stohastički $y=f(t)$

u fazi upravljanja
(*temelje se na točnim vrijednostima*)

Distribuirani

Usredotočeni



Nelinearni

(*krivulja*)

Linearni

(*pravac*)

Radi lakšeg upravljanja i
optimiranja
cilj je
proces voditi kontinuirano.

(*ako se to može
primijeniti na proces*)

Deterministički

Izračunavaju uvijek isto rješenje (pri istim uvjetima).

Stohastički

Izračunavaju rješenje koje je unutar raspona, 'veće od' ili 'manje od'.

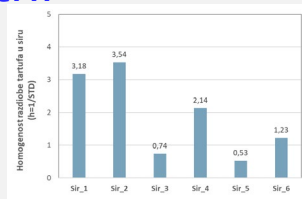
Distribuirani ili raspodijeljeni

Ulazne vrijednosti za volumen ili proces na koji se odnose uzimaju kao da je volumen ili proces homogen.

Usredotočeni ili koncentrirani

Za svaki dio volumena ili procesa izračunavaju drugačije vrijednosti.

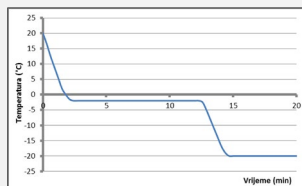
Diskretni



Podaci ne slijede jedan za drugim u neprekinutom vremenskom nizu.

(Ako temperaturu zraka mjerimo jednom godišnje, ne možemo podatke za 10 godina prikazati linijom nego stupcima; Ocjene različitih ispita ili studenata; Podaci za različite proizvode.)

Kontinuirani



Podaci slijede jedan za drugim u neprekinutom vremenskom nizu.

(Ako temperaturu zraka mjerimo svakih 60 minuta možemo podatke za 10 godina možemo prikazati linijom; Rast čovjeka tijekom odrastanja; Podaci za isti proizvod tijekom skladištenja.)

Linearni

Podaci na grafičkom prikazu povezani pravcem.

Nelinearni

Podaci na grafičkom prikazu povezani su krivuljom.



1. Matematičko modeliranje, optimiranje i upravljanje

Uvod i definicije pojmova
Metodologija razvoja matematičkog modela
Podjela matematičkih modela
Numeričke metode
Računalni programi i simulacije

1. METODE ZA RJEŠAVANJE LINEARNIH JEDNADŽBI

Direktne metode

1. Gauss-ova eliminacija
2. Gauss-Jordan-ov postupak

Iterativne metode

3. Jacobijeva linearna iteracija
4. Gauss-Seidl-ova iteracija

Gauss-ova eliminacija

Zadan je sustav linearnih jednadžbi:

$$x + 2y - 3z = 0$$

$$2x - y + 4z = 5$$

$$3x + y - z = 2$$

Pri određivanju rješenja metodom Gauss-ove eliminacije zadani sustav jednadžbi se napiše u matičnom obliku: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{vmatrix}$$

Rješavanje se provodi na slijedeći način:

Potrebno je načiniti proširenu matricu **Ab**, tako da vektor rješenja pripišemo kao četvrti stupac matrici koeficijenata **A**

$$\begin{array}{ccc|c|c} & \mathbf{A} & & & \vec{b} \\ & & & & \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 0 \\ & 2 & -1 & 4 & 5 \\ & 3 & 1 & -1 & 2 \end{array} \cdot \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ 5 \\ 2 \end{array} \quad \mathbf{A}\vec{b} = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}$$

Nad proširenom (Gaussovom) matricom provodimo **elementarne transformacije**. Množimo i dijelimo retke nekim brojem ili zbrajamo i oduzimamo od jednoga retka vrijednosti nekoga drugoga retka.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & 2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} \sim \\
 \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

$$0 \cdot x + 1 \cdot y - 2 \cdot z = -1$$

$$y - 2 \cdot \frac{3}{2} = -1$$

$$y - 3 = -1$$

$$y = -1 + 3$$

$$y = 2$$

$$1 \cdot x + 2 \cdot y - 3 \cdot z = 0$$

$$x + 2 \cdot 2 - 3 \cdot \frac{3}{2} = 0$$

$$x + 4 - \frac{9}{2} = 0$$

$$x - \frac{1}{2} = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{3}{2}$$

Gauss-Jordan-ov postupak

Elementarne transformacije koje su provedene u drugom koraku rješavanja kod Gauss-ove eliminacije moguće je nastaviti sve dok na glavnoj dijagonali matrice nisu jedinice, a ostali elementi ispod i iznad dijagonale nule.

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array} \right|$$

Kada su elementi glavne dijagonale jedinice, a ispod i iznad glavne dijagonale nule rješenje je moguće očitati direktno iz matrice:

1. redak: $1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0.5$

2. redak: $0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = 2$

3. redak: $0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 1.5$

$$x = 0.5$$

$$y = 2$$

$$z = 1.5$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & -3 \\ \hline 2 & -1 & 4 \\ \hline 3 & 1 & -1 \\ \hline \end{array}
 * \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline y \\ \hline z \\ \hline \end{array}
 = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 5 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & A & \\ \hline \end{array}
 * \begin{array}{|c|} \hline \rightarrow \\ \hline x \\ \hline \end{array}
 = \begin{array}{|c|} \hline \rightarrow \\ \hline b \\ \hline \end{array}$$

$$\underline{x = b / A}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & A^{-1} & \\ \hline \end{array}
 * \begin{array}{|c|} \hline \rightarrow \\ \hline b \\ \hline \end{array}
 = \begin{array}{|c|} \hline \rightarrow \\ \hline x \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline -0,3 & -0,1 & 0,5 \\ \hline 1,4 & 0,8 & -1,0 \\ \hline 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ \hline \end{array}
 * \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 5 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}
 = \begin{array}{|c|} \hline 0,5 \\ \hline 2,0 \\ \hline 1,5 \\ \hline \end{array}$$



primjer u MS Excelu

1. METODE ZA RJEŠAVANJE LINEARNIH JEDNADŽBI

Direktne metode

1. Gauss-ova eliminacija ✓
2. Gauss-Jordan-ov postupak ✓

Iterativne metode

3. Jacobijeva linearna iteracija
4. Gauss-Seidl-ova iteracija

2. METODE ZA RJEŠAVANJE NELINEARNIH JEDNADŽBI

1. Jacobijeva linearna iteracija
2. Wegstein-ova metoda
3. Newton-Raphson-ova metoda
4. Metoda sekante

3. METODE ZA INTEGRIRANJE DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI

EKSPPLICITNE METODE

1. Euler-ova metoda
2. Korigirana Euler-ova metoda
3. Taylor-ov razvoj reda
4. Metoda Runge-Kutta 2
5. Metoda Runge-Kutta 4

4. LINEARNO PROGRAMIRANJE

Simplex algoritam

1. Optimalno namješavanje smjese sirovina
2. Optimiranje sastava obroka
3. Optimiranje iskorištenja pogona/strojeva

1. Podjela matematičkih modela
2. Klasifikacija modela prema matematičkoj strukturi
3. Matematički alati za rješavanje jednadžbi modela

1. METODE ZA RJEŠAVANJE LINEARNIH JEDNADŽBI

Direktne metode

1. Gauss-ova eliminacija ✓
2. Gauss-Jordan-ov postupak ✓

Iterativne metode

3. Jacobijeva linearna iteracija
4. Gauss-Seidl-ova iteracija

2. METODE ZA RJEŠAVANJE NELINEARNIH JEDNADŽBI

1. Jacobijeva linearna iteracija
2. Wegstein-ova metoda
3. Newton-Raphson-ova metoda
4. Metoda sekante

KONVERGENCIJA METODA

Primjer nelinearne jednačbe:

$$f(x) = x - e^{-x}$$

$$f(x) = 0 \quad x = ?$$

Jacobi-jeva iteracijska formula:

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

$$x = e^{-x}$$

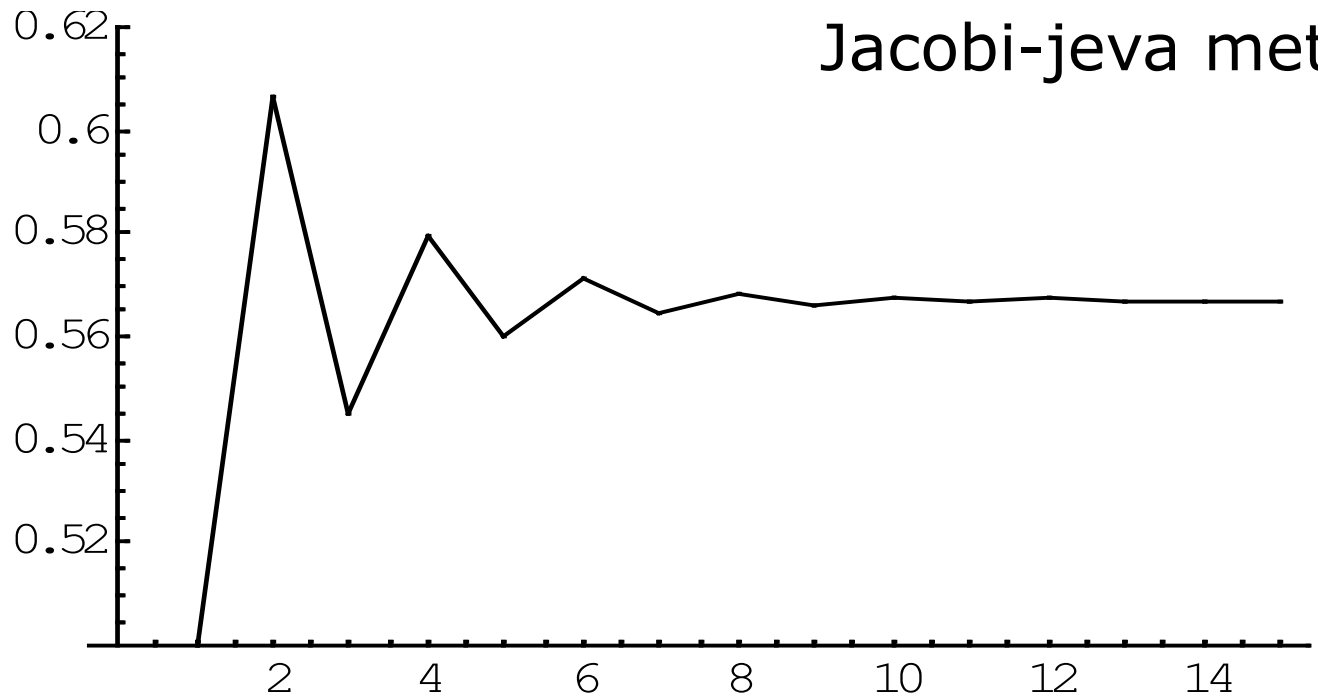
$$x_{k+1} = e^{-x_k}$$

Newton-Raphson-ova iteracijska formula:

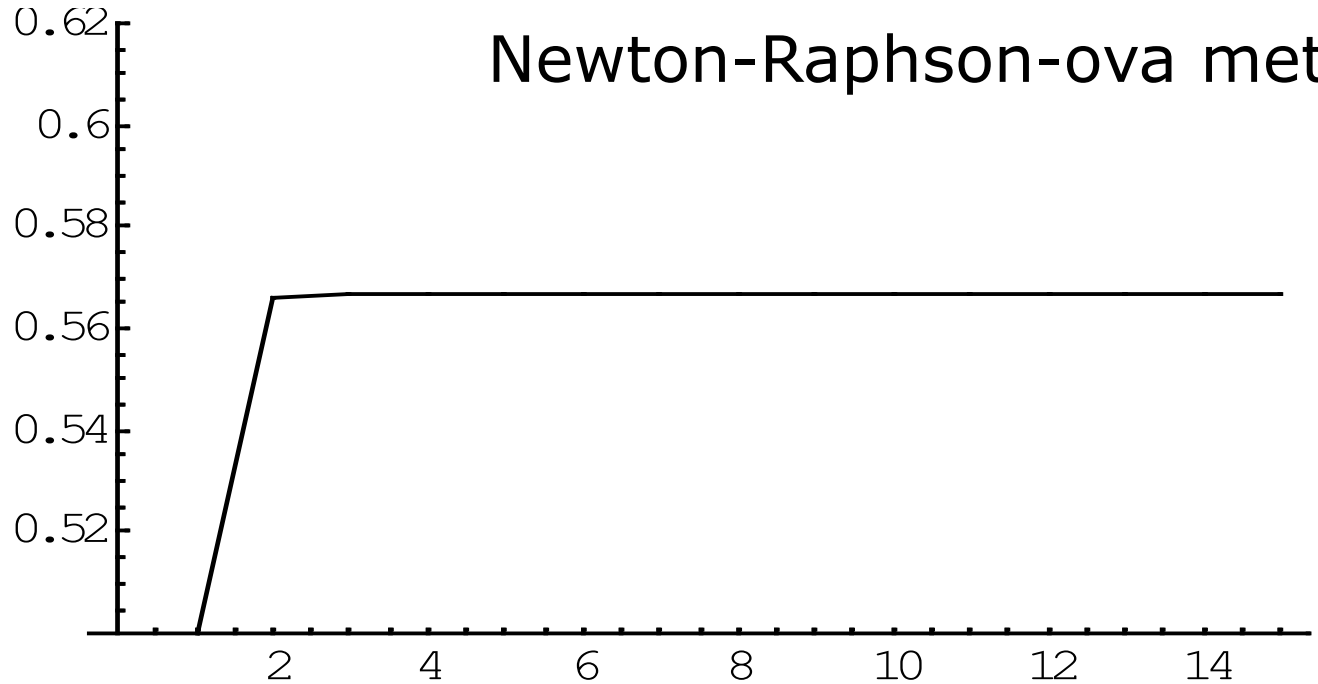
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

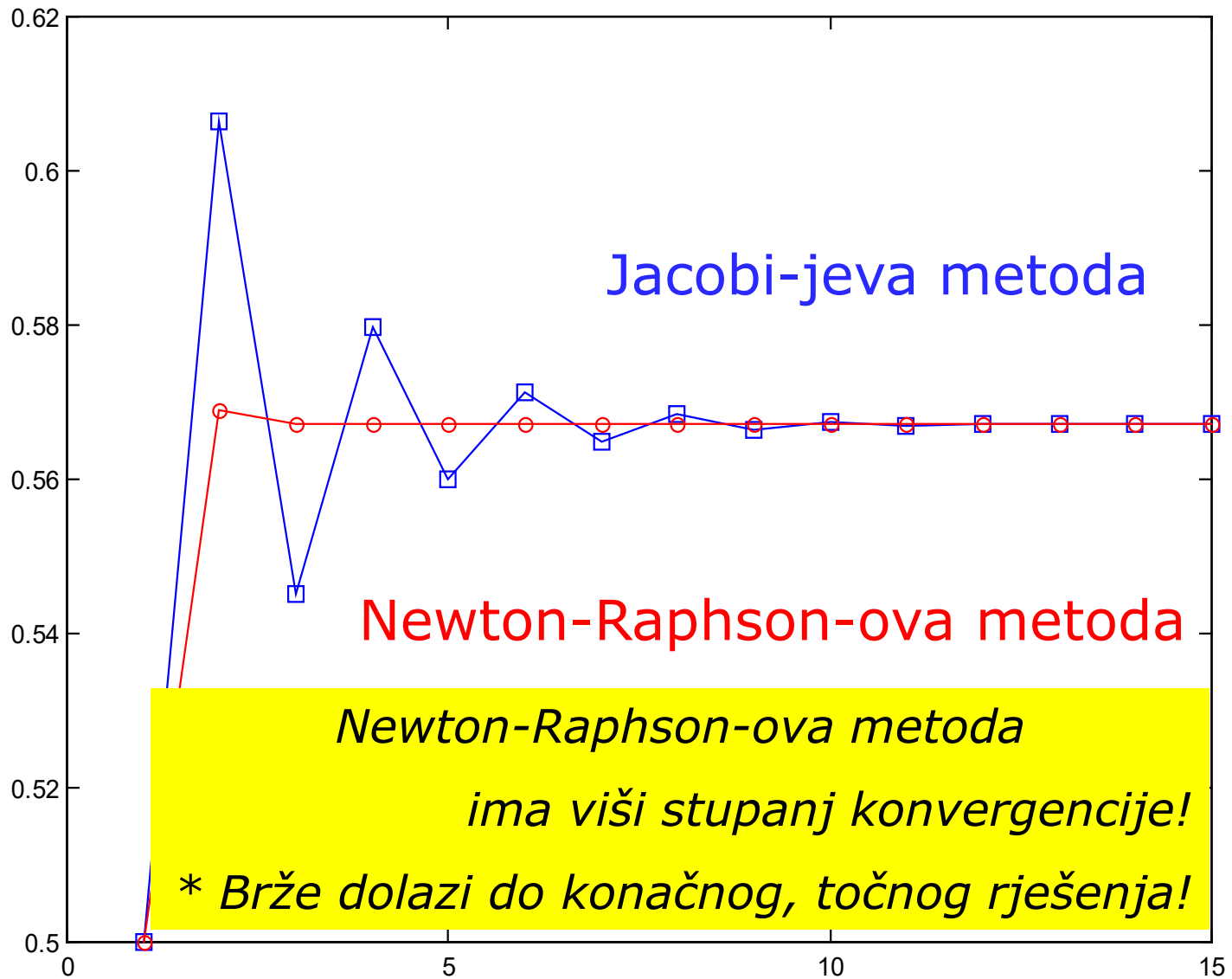
$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - e^{-x_k}}{1 + e^{-x_k}}$$

Jacobi-jeva metoda



Newton-Raphson-ova metoda





MATEMATIČKI UVJET ZA KONVERGENCIJU

Jacobi-jeva linearna iteracija

Rješenje za x označavamo grčkim slovom ξ (ksi), tako da je

Algoritam

$$1. \quad A * x = b$$

$$A * \xi = b$$

$$2. \quad x = a * x + b$$

$$\xi = a * \xi + b$$

$$3. \quad x_{k+1} = a * x_k + b$$

$$e_k = x_k - \xi$$

Razliku ili pogrešku između rješenja u pojedinoj iteraciji i točnog rješenja označavamo s „ e_k ”.

$$e_1 = x_1 - \xi$$

$$e_2 = x_2 - \xi = a * x_1 + b - a * \xi - b = a * e_1$$

$$e_3 = x_3 - \xi = a * x_2 + b - a * \xi - b = a * e_2 = a^2 * e_1$$

$$\dots$$
$$e_{n+1} = a^n * e_1$$

niz pogrešaka : $e_1, a * e_1, a^2 * e_1, a^3 * e_1, \dots, a^n * e_1$

Uvjet konvergencije Jacobijeve metode:

$$x_{k+1} = g(x_k) \quad \text{uvjet} \quad |g'(\xi)| < 1$$

$$x_{k+1} = a * x_k + b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^n \cdot e_1) = 0 \text{ za svaki } e_1 \text{ ako je } |a| < 1$$

Definicija stupnja konvergencije:

$$e_{k+1} = a \cdot e_k^n$$

stupanj konvergencije

$$e_{k+1} = g'(\xi) \cdot e_k^1$$

Jacobijeva metoda ima stupanj konvergencije $n=1$

MATEMATIČKI UVJET ZA KONVERGENCIJU Newton-Raphson-ova iteracija

Poznat nam je uvjet konvergencije Jacobijeve metode

$$x_{k+1} = g(x_k) \quad \text{uvjet} \quad |g'(\xi)| < 1$$

Primijenimo isti rezultat za Newton-Raphson-ovu iteracijsku formulu

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

odgovarajuća $g(x)$ funkcija je: $g(x) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$$g(\xi) = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$$

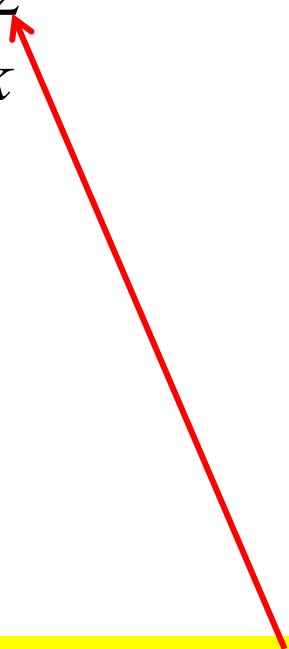
$$g'(\xi) = 1 - \frac{f'(\xi) - f(\xi) \cdot f''(\xi)}{f'(\xi)^2}$$

Lokalni uvjet konvergencije

Newton-Raphsonove metode je $|g'(\xi)| < 1$

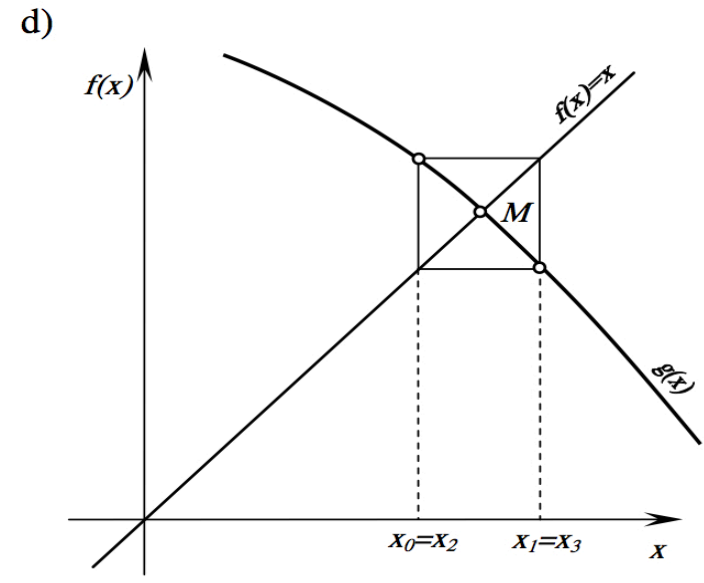
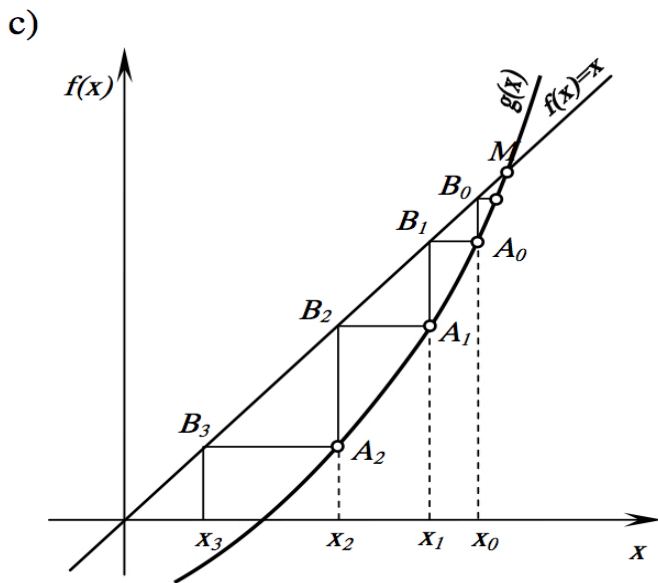
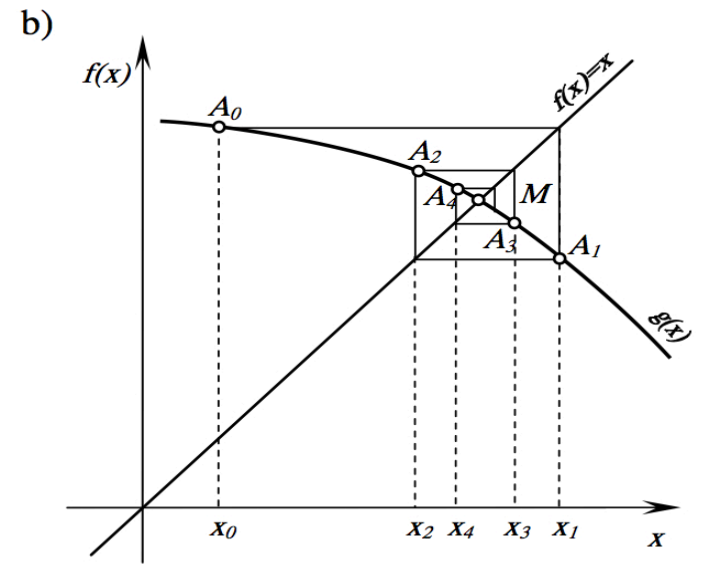
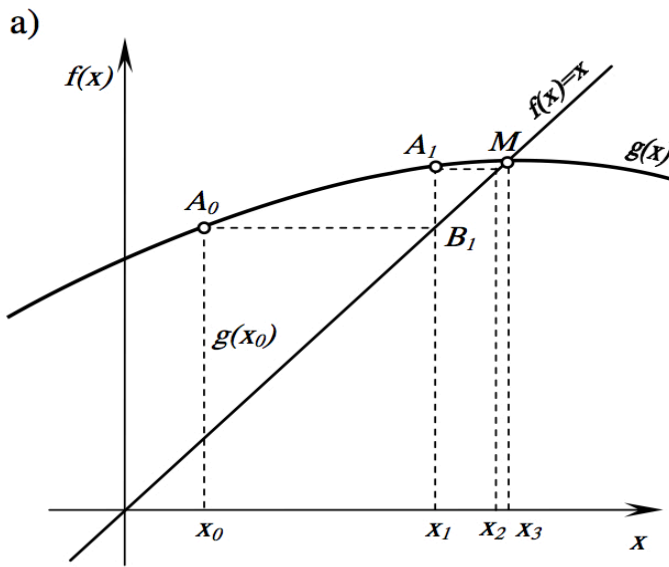
$$|g'(\xi)| = \left| \frac{f(\xi) \cdot f''(\xi)}{f'(\xi)^2} \right| < 1$$

$$e_{k+1} = x_{k+1} - \xi = x_k - f(x_k) / f'(x_k) - \xi$$

$$e_{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \cdot e_k^2 = c \cdot e_k^2$$


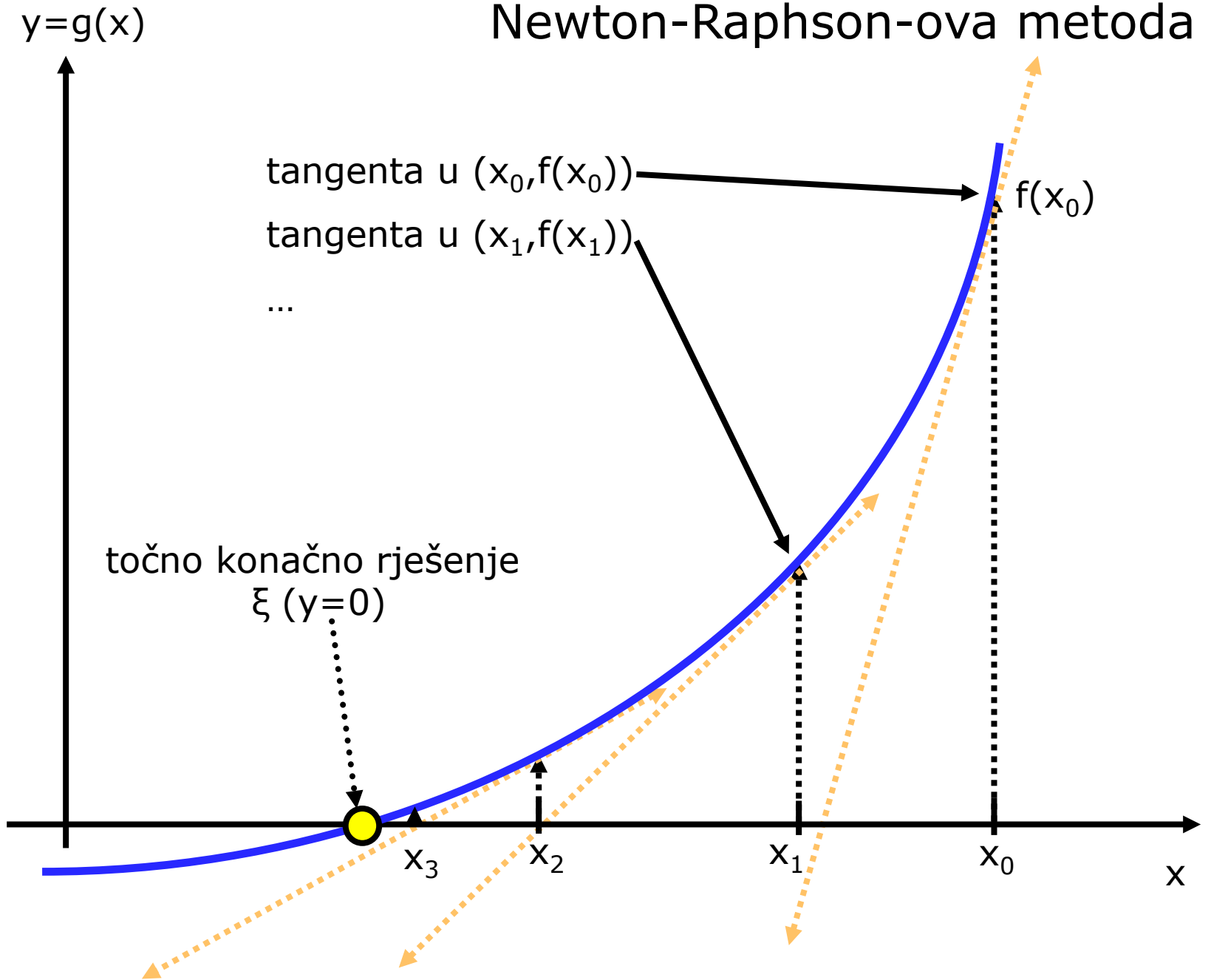
Newton-Raphson-ova metoda ima

stupanj konvergencije $n=2$



Slika 1.1: Geometrijska interpretacija iteracije $x_{n+1} = g(x_n)$

Newton-Raphson-ova metoda



2. METODE ZA RJEŠAVANJE NELINEARNIH JEDNADŽBI

1. Jacobijeva linearna iteracija
2. Wegstein-ova metoda
3. Newton-Raphson-ova metoda
4. Metoda sekante

Jednadžba pravca kroz dvije točke

$$T_1 (x_1, g_1 = g(x_1))$$

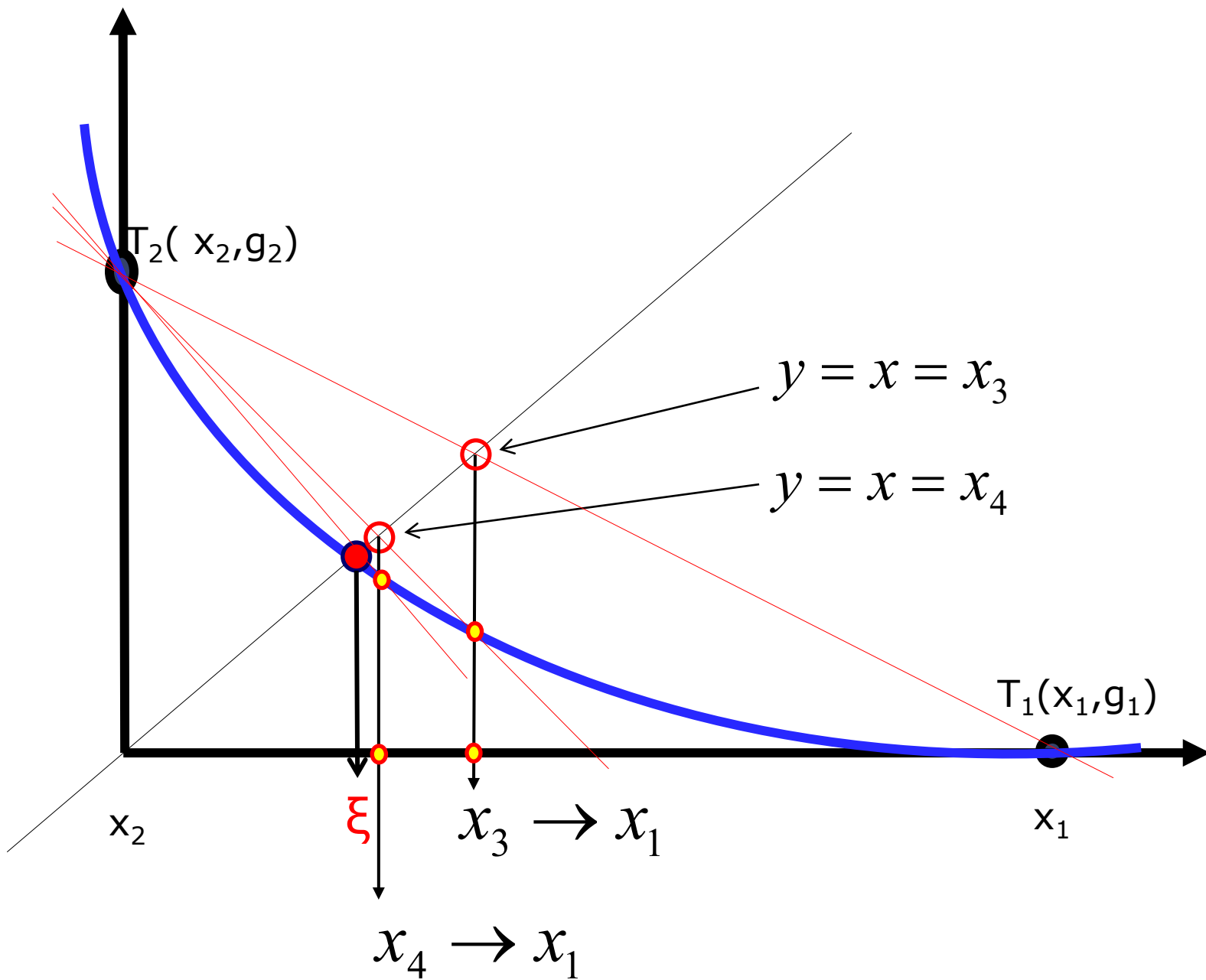
$$T_2 (x_2 = g_1, g_2 = g(x_2))$$

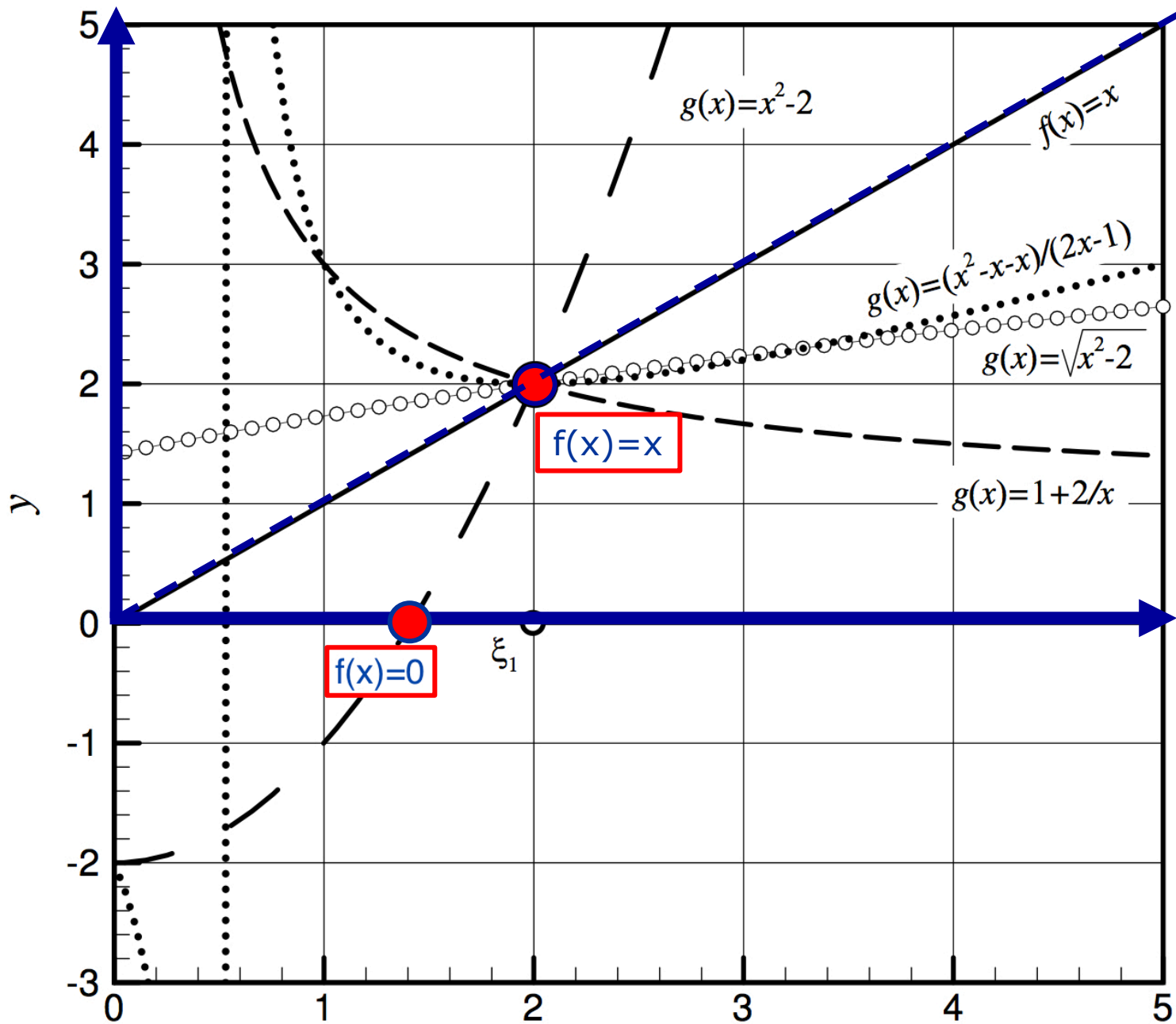
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

$$y - g_1 = \frac{g_2 - g_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \quad y = x = x_3$$

$$x_3 = \frac{g_1^2 - x_1 \cdot g_2}{2 \cdot g_1 - x_1 - g_2}$$

$$x_1 \leftarrow x_3$$





Mogući oblici rješenja $f(x) = x^2 - 2$ iterativnim metodama

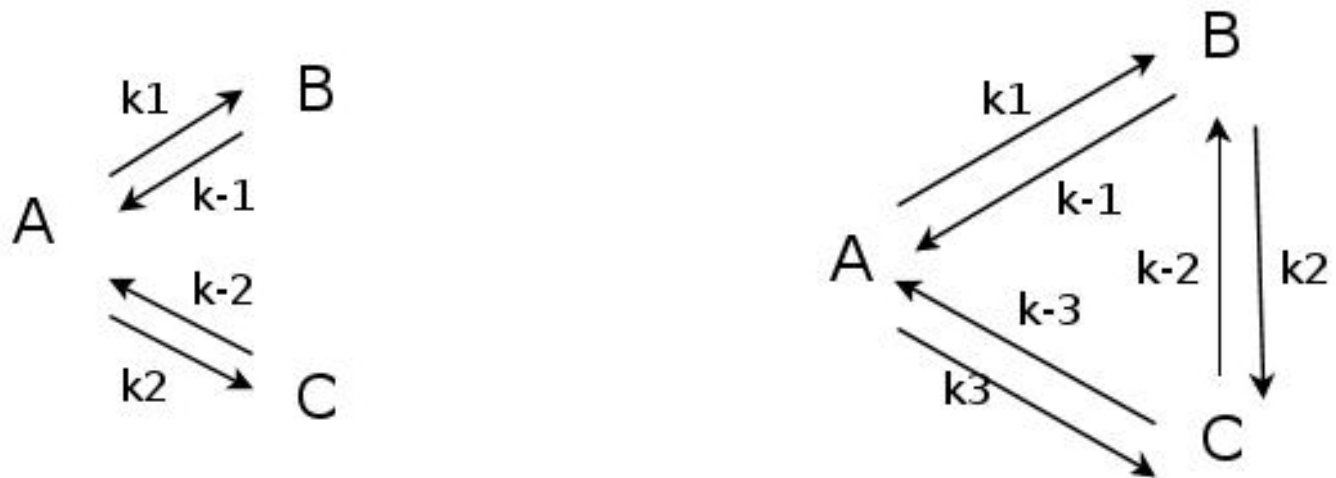
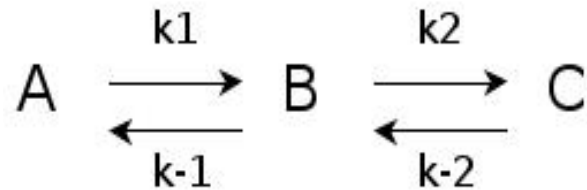


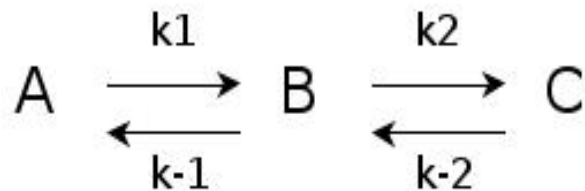
2. Matematičko modeliranje, optimiranje i upravljanje

Stacionarna stanja
kemijskih reakcijskih mehanizama

Stacionarna stanja
enzimskih reakcijskih mehanizama

Stacionarna stanja kemijskih reakcijskih mehanizama (linearni kinetički modeli)

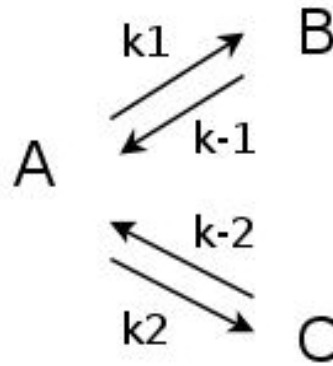




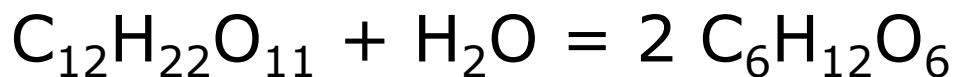
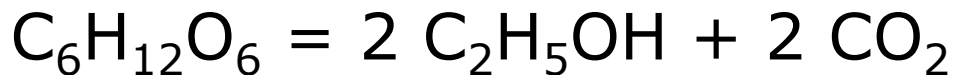
grožde → *vino* → *vinski ocat*

šećer → *alkohol* → *ocat*

glukoza/fruktoza → *etilni alkohol* → *octena kiselina*

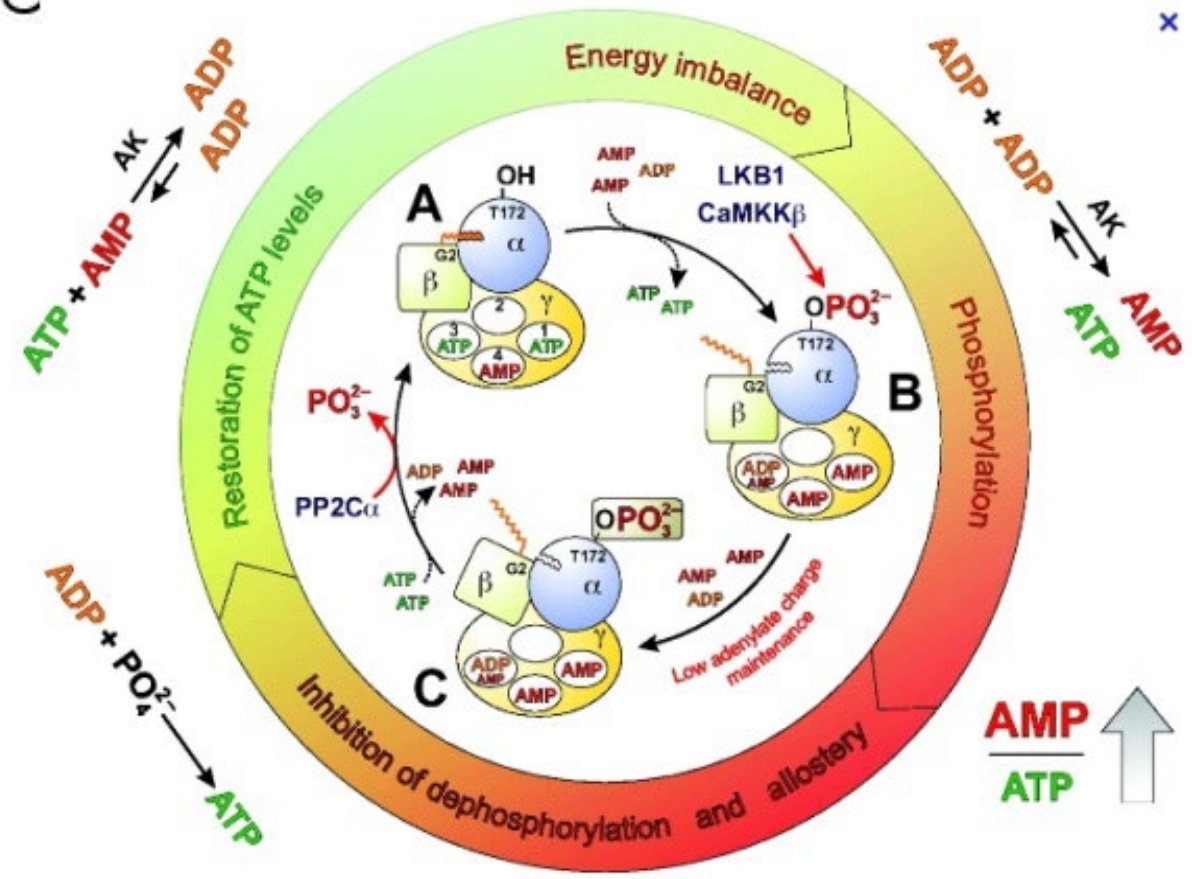
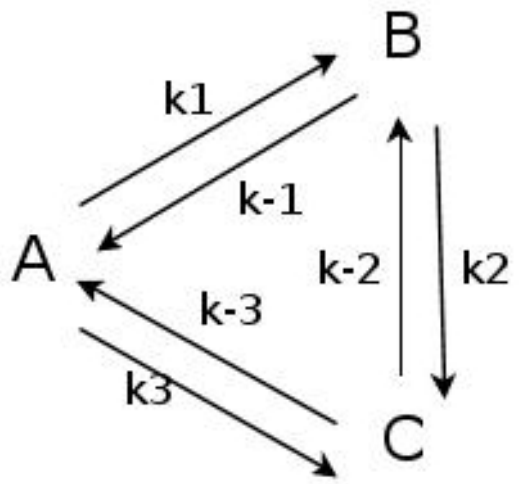


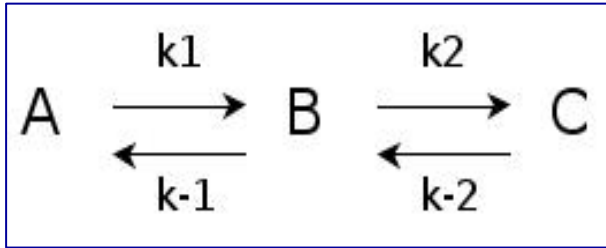
$A, B, C = ?$



saharoza = glukozna + fruktoza

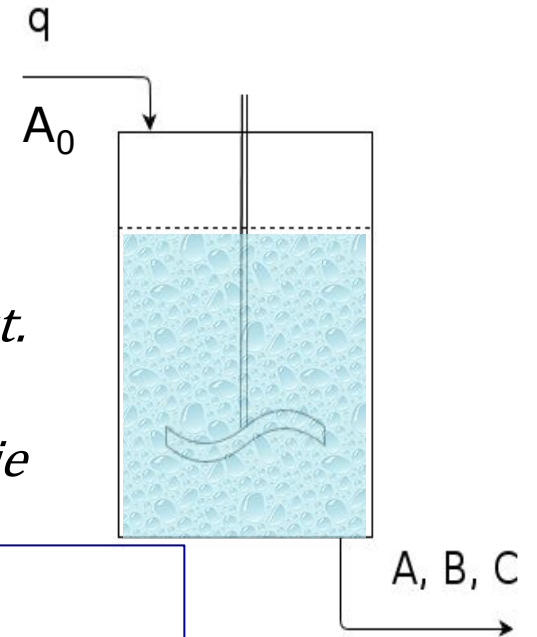
(H_2O , $3 < \text{pH} < 5$)





$V = \text{konst.}$

$\frac{q}{V} = D = \text{razrjeđenje}$



$$\frac{d}{dt}A = D \cdot A_0 + k_{-1} \cdot B - k_1 \cdot A - D \cdot A$$

$$\frac{d}{dt}B = k_1 \cdot A + k_{-2} \cdot C - k_{-1} \cdot B - k_2 \cdot B - D \cdot B$$

$$\frac{d}{dt}C = +k_2 \cdot B - k_{-2} \cdot C - D \cdot C$$

u stacionarnom stanju $\rightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = 0$

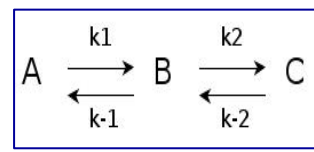
selektivnost = $\frac{B}{C}$

$$\frac{d}{dt}A = D \cdot A_0 + k_{-1} \cdot B - k_1 \cdot A - D \cdot A$$

$$\frac{d}{dt}B = k_1 \cdot A + k_{-2} \cdot C - k_{-1} \cdot B - k_2 \cdot B - D \cdot B$$

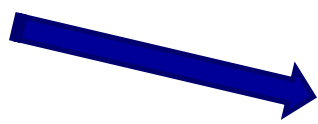
$$\frac{d}{dt}C = +k_2 \cdot B - k_{-2} \cdot C - D \cdot C$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -(D + k_1) & k_{-1} & 0 \\ k_1 & -(D + k_{-1} + k_2) & k_{-2} \\ 0 & k_2 & -(D + k_{-2}) \end{pmatrix}$$



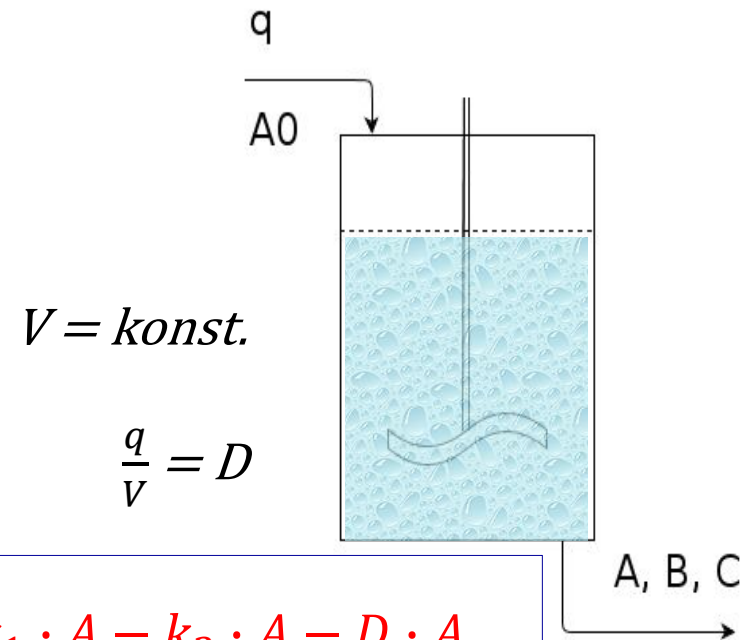
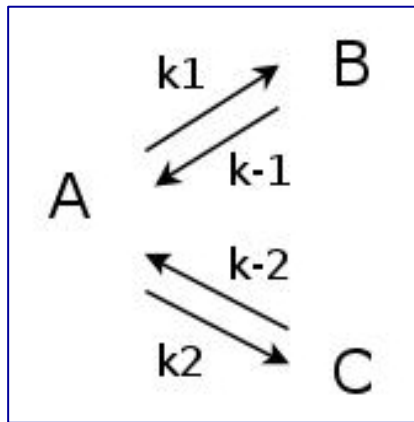
$$\begin{vmatrix}
 -(D + k_1) & k_{-1} & 0 \\
 k_1 & -(D + k_{-1} + k_2) & k_{-2} \\
 0 & k_2 & -(D + k_{-2})
 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} A \\ B \\ C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -D \cdot A_0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A} * \vec{x} = \vec{b}$$



$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} * \vec{b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
 -(D + k_1) & k_{-1} & 0 \\
 k_1 & -(D + k_{-1} + k_2) & k_{-2} \\
 0 & k_2 & -(D + k_{-2})
 \end{pmatrix}$$



$$\frac{d}{dt}A = D \cdot A_0 + k_{-1} \cdot B + k_{-2} \cdot C - k_1 \cdot A - k_2 \cdot A - D \cdot A$$

$$\frac{d}{dt}B = +k_1 \cdot A - k_{-1} \cdot B - D \cdot B$$

$$\frac{d}{dt}C = +k_2 \cdot A - k_{-2} \cdot C - D \cdot C$$

u stacionarnom stanju $\rightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = 0$

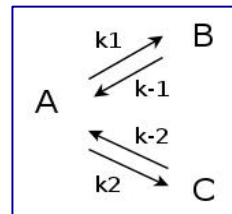
selektivnost = $\frac{B}{C}$

$$\frac{d}{dt}A = D \cdot A_0 + k_{-1} \cdot B + k_{-2} \cdot C - k_1 \cdot A - k_2 \cdot A - D \cdot A$$

$$\frac{d}{dt}B = +k_1 \cdot A - k_{-1} \cdot B - D \cdot B$$

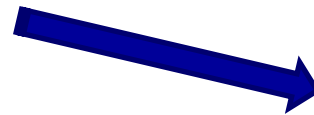
$$\frac{d}{dt}C = +k_2 \cdot A - k_{-2} \cdot C - D \cdot C$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -(D + k_1 + k_2) & k_{-1} & k_{-2} \\ k_1 & -(D + k_{-1}) & 0 \\ k_2 & 0 & -(D + k_{-2}) \end{pmatrix}$$



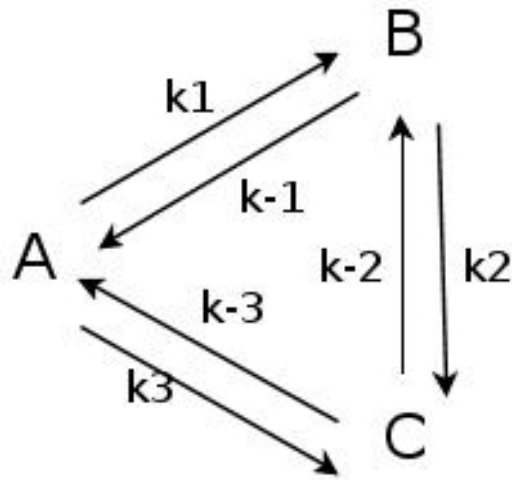
$$\begin{vmatrix} -(D + k_1 + k_2) & k_{-1} & k_{-2} \\ k_1 & -(D + k_{-1}) & 0 \\ k_2 & 0 & -(D + k_{-2}) \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} A \\ B \\ C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -D \cdot A_0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A} * \vec{x} = \vec{b}$$



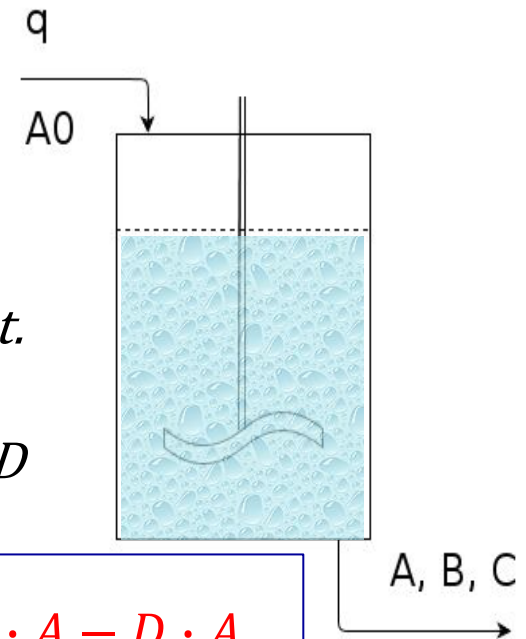
$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} * \vec{b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -(D + k_1 + k_2) & k_{-1} & k_{-2} \\ k_1 & -(D + k_{-1}) & 0 \\ k_2 & 0 & -(D + k_{-2}) \end{pmatrix}$$



$$V = \textit{konst.}$$

$$\frac{q}{V} = D$$



$$\frac{d}{dt} A = D \cdot A_0 + k_{-1} \cdot B + k_{-3} \cdot C - k_1 \cdot A - k_3 \cdot A - D \cdot A$$

$$\frac{d}{dt} B = k_1 \cdot A + k_{-2} \cdot C - k_{-1} \cdot B - k_2 \cdot B - D \cdot B$$

$$\frac{d}{dt} C = k_3 \cdot A + k_2 \cdot B - k_{-3} \cdot C - k_{-2} \cdot C - D \cdot C$$

$$\textit{u stacionarnom stanju} \rightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = 0$$

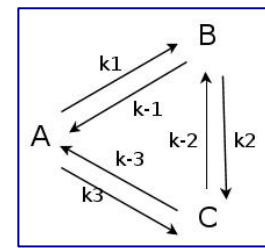
$$\textit{selektivnost} = \frac{B}{C}$$

$$\frac{d}{dt}A = D \cdot A_0 + k_{-3} \cdot C - k_1 \cdot A + k_{-1} \cdot B - k_3 \cdot A - D \cdot A$$

$$\frac{d}{dt}B = k_1 \cdot A - k_1 \cdot B + k_{-2} \cdot C - k_2 \cdot B - D \cdot B$$

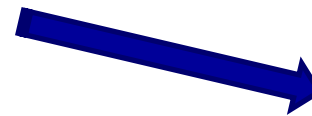
$$\frac{d}{dt}C = k_3 \cdot A + k_2 \cdot B - k_{-3} \cdot C - k_{-2} \cdot C - D \cdot C$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -(D + k_1 + k_3) & k_{-1} & k_{-3} \\ k_1 & -(D + k_1 + k_2) & k_{-2} \\ k_3 & k_2 & -(D + k_{-3} + k_{-2}) \end{pmatrix}$$



$$\begin{vmatrix} -(D + k_1 + k_3) & k_{-1} & k_{-3} \\ k_1 & -(D + k_{-1} + k_2) & k_{-2} \\ k_3 & k_2 & -(D + k_{-3} + k_{-2}) \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} A \\ B \\ C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -D \cdot A_0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

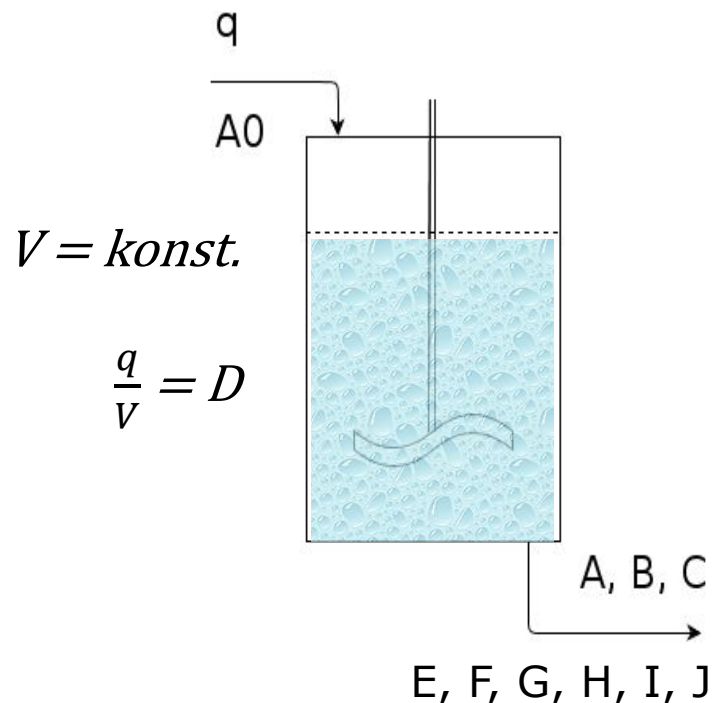
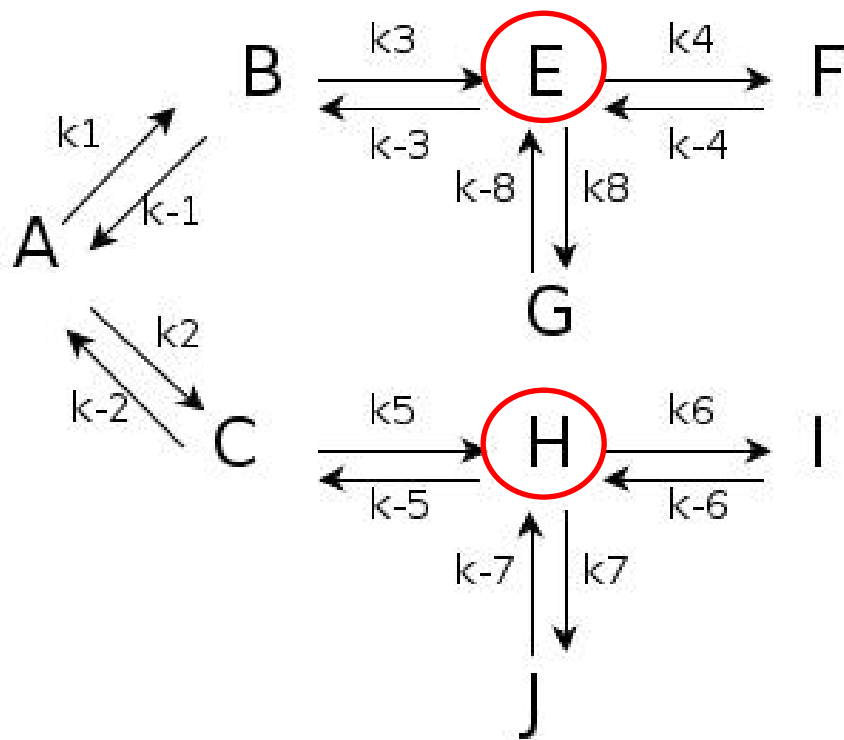
$$\mathbf{A} * \vec{x} = \vec{b}$$



$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} * \vec{b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -(D + k_1 + k_3) & k_{-1} & k_{-3} \\ k_1 & -(D + k_{-1} + k_2) & k_{-2} \\ k_3 & k_2 & -(D + k_{-3} + k_{-2}) \end{pmatrix}$$

Izvedite bilance za produkte E i H u sljedećem reakcijskom mehanizmu



$$selektivnost = \frac{E}{H}$$

$$\frac{d}{dt}A = D \cdot A_0 - D \cdot A - k_1 \cdot A + k_{-1} \cdot B - k_2 \cdot A + k_{-2} \cdot C$$

$$\frac{d}{dt}B = -D \cdot B + k_1 \cdot A - k_{-1} \cdot B + k_{-3} \cdot E - k_3 \cdot B$$

$$\frac{d}{dt}C = -D \cdot C + k_2 \cdot A - k_{-2} \cdot C + k_{-5} \cdot H - k_5 \cdot C$$

$$\frac{d}{dt}E = -D \cdot E + k_3 \cdot B - k_{-3} \cdot E + k_{-4} \cdot F - k_4 \cdot E - k_8 \cdot E + k_{-8} \cdot G$$

$$\frac{d}{dt}F = -D \cdot F + k_4 \cdot E - k_{-4} \cdot F$$

$$\frac{d}{dt}G = -D \cdot G + k_8 \cdot E - k_{-8} \cdot G$$

$$\frac{d}{dt}H = -D \cdot H + k_5 \cdot C - k_{-5} \cdot H + k_{-6} \cdot I + k_{-7} \cdot J - k_6 \cdot H - k_7 \cdot H$$

$$\frac{d}{dt}I = -D \cdot I + k_6 \cdot H - k_{-6} \cdot I$$

$$\frac{d}{dt}J = -D \cdot J + k_7 \cdot H - k_{-7} \cdot J$$

Elementi neophodni za opisivanje tablica i grafikona

PROCES; UREĐAJ	MATERIJAL; NAMIRNICA; UZORAK	IZMJERENO; IZRAČUNATO; IZ LITERATURE	UVJETI I METODA	POČETNI UVJETI	MJERNE VELIČINE I MJERNE JEDINICE
Protočni kemijski reaktor	Reaktant A Produkt B Produkt C	Izračunate vrijednosti	Slijedni reakcijski mehanizam	$Q = 0,01 \text{ Ls}^{-1}$ $A_0 = 2 \text{ gL}^{-1}$ $V = \text{konst.}$	Protok (Ls^{-1}) Koncentracija (gL^{-1}) Volumen (L)

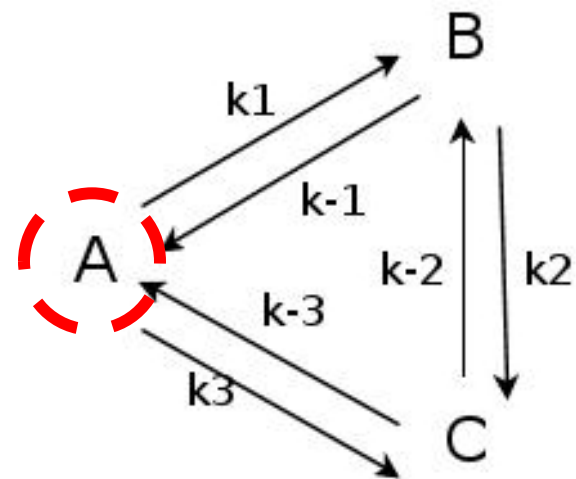
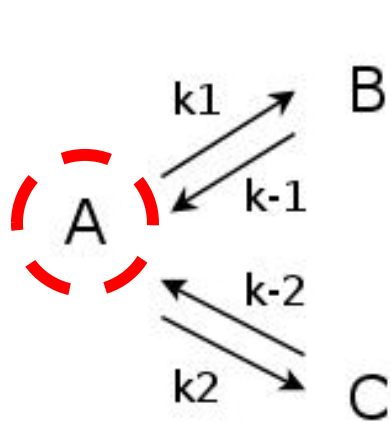
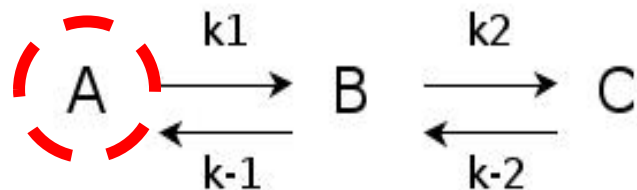


2. Matematičko modeliranje, optimiranje i upravljanje

Stacionarna stanja
kemijskih reakcijskih mehanizama

Stacionarna stanja
enzimskih reakcijskih mehanizama

Stacionarna stanja kemijskih reakcijskih mehanizama (linearni kinetički modeli)




Stacionarna stanja enzimskih reakcijskih mehanizama (linearni kinetički modeli)



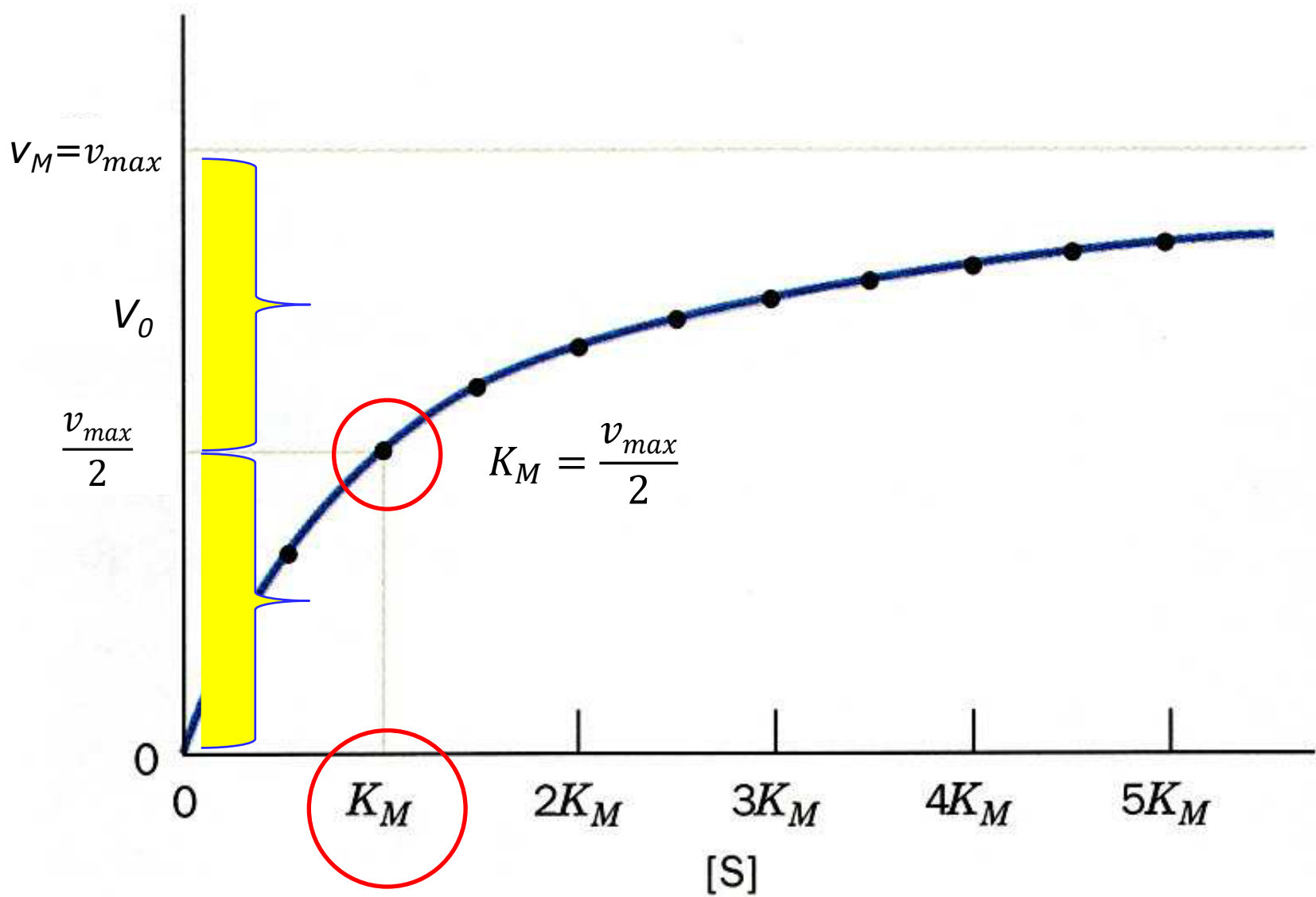
TEORIJA

- Enzimi su uglavnom proteini, a samo su neke RNK ribosomi.
- Imaju veliku katalitičku moć
(**ubrzavaju reakcije 10^6 - 10^8 puta**).
- **Nemaju sporednih produkata**, a njihova aktivnost može se kontrolirati i regulirati.

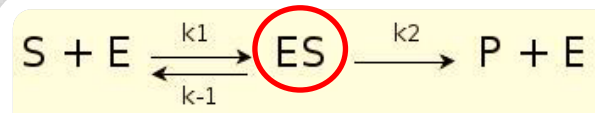
- 
- Brzina enzimski katalizirane reakcije često je *veća* od brzine te iste reakcije katalizirane nebiološkim katalizatorom.
 - Enzimi su *visokospecifični* te uglavnom **jedan enzim katalizira samo jednu reakciju pod određenim fizikalno-kemijskim uvjetima.**
 - **U organizmu postoji mnoštvo enzima** od kojih svaki pojedini katalizira određenu reakciju.
 - Reakcije su međusobno povezane unutar metabolizma.

- Michaelis-Menteničina konstanta (K_m)
numerički izražava *afinitet enzima prema supstratu*.
- K_m se definira kao ona koncentracija supstrata kod koje je brzina reakcije jednaka polovici maksimalne brzine.
- K_m ovisi o supstratu te o uvjetima okoline kao što su pH i temperatura.
- Eksperimentalno se određuje mjerenjem početne brzine reakcije (v_0) kod različitih koncentracija supstrata, dok se računski definira kao:

$$K_M = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1}$$



Što enzim jače veže svoj supstrat, reakcija je sporija i manja je vrijednost K_M .



Bilanca enzim-supstrat kompleksa u stacionarnom stanju postaje linearna jednađžba:

$$\frac{d}{dt} ES = 0 = k_1 \cdot s \cdot E - k_{-1} \cdot ES - k_2 \cdot ES$$

Riješimo ovu jednađžbu po varijabli E uz uvjet $E + ES = E_0$

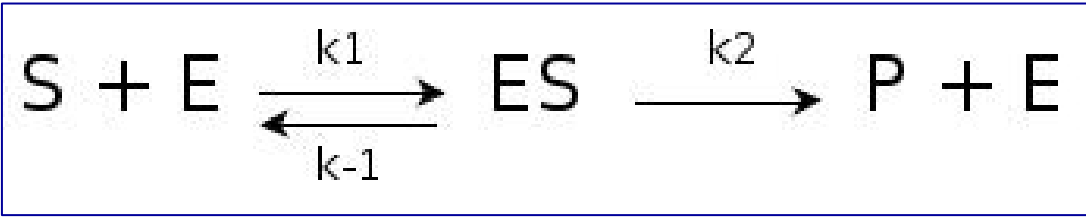
$$ES = E_0 \cdot \frac{s}{K_M + s} \quad K_M = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1} \quad (\text{Michaelis-Menten konst.})$$

Najveća brzina reakcije bit će ostvarena kada sve molekule enzima budu u obliku ES kompleksa.

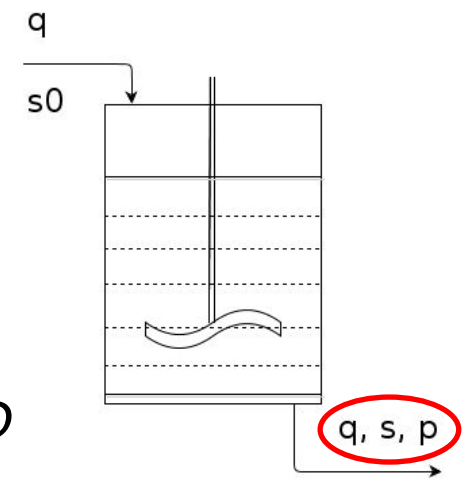
Ta brzina definirana je kao **maksimalna brzina enzimski katalizirane reakcije**, a određena je kao:

$$v_{max} = k_2 \cdot E_0$$

MODELIRANJE ENZIMSKE REAKCIJE



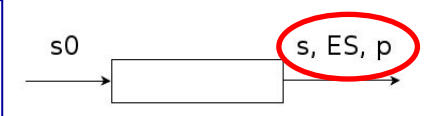
$$V = konst. \quad \frac{q}{V} = D$$



$$\frac{d}{dt}s = k_{-1} \cdot ES + D \cdot (s_0 - s) - k_1 \cdot s \cdot E$$

$$\frac{d}{dt}ES = k_1 \cdot s \cdot E - k_{-1} \cdot ES - k_2 \cdot ES$$

$$\frac{d}{dt}p = k_2 \cdot ES - D \cdot p$$



Zašto množimo s „E“ ?
 >E ⇔ >k₁

Ukupna količina enzima

$$E_0 = E + ES$$

u stacionarnom stanju: $\frac{d}{dt}(s, ES, p)^T = 0$

$$\frac{d}{dt}ES =$$

$$k_1 \cdot s \cdot E - k_{-1} \cdot ES - k_2 \cdot ES = 0 \quad E_0 = E + ES$$

$\rightarrow E = E_0 - ES$

$$k_1 \cdot s \cdot (E_0 - ES) - k_{-1} \cdot ES - k_2 \cdot ES = 0$$

$$k_1 \cdot s \cdot E_0 - k_1 \cdot s \cdot ES - k_{-1} \cdot ES - k_2 \cdot ES = 0$$

$$k_1 \cdot s \cdot E_0 - (k_1 \cdot s + k_{-1} + k_2) \cdot ES = 0$$

$$ES = \frac{k_1 \cdot s \cdot E_0}{(k_1 \cdot s + k_{-1} + k_2)}$$

$$ES = E_0 \cdot \frac{s}{\frac{k_{-1} + k_2 + k_1 \cdot s}{k_1}}$$


$$K_M = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1}$$

$$ES = E_0 \cdot \frac{s}{K_M + s}$$

$$v_{max} = k_2 \cdot E_0$$

Najveća brzina reakcije bit će ostvarena kada sve molekule enzima budu u obliku ES kompleksa: $ES = E_0$

$$r = k_2 \cdot ES = k_2 \cdot E_0 \cdot \frac{s}{K_M + s} = v_{max} \cdot \frac{s}{K_M + s} = v_M \cdot \frac{s}{K_M + s}$$


$$r = k_2 \cdot ES = k_2 \cdot E_0 \cdot \frac{s}{K_M + s} = v_{max} \cdot \frac{s}{K_M + s} = v_M \cdot \frac{s}{K_M + s}$$

Uvrstimo rezultat u bilancu koncentracije supstrata u stacionarnom stanju i dobijemo izraz koji određuje **stacionarno stanje koncentracije supstrata:**

$$\frac{d}{dt}s = D \cdot (s_0 - s) + \underline{k_{-1} \cdot ES - k_1 \cdot s \cdot E}$$

$$\frac{d}{dt}s = 0 = D \cdot (s_0 - s) - v_M \cdot \frac{s}{K_M + s}$$

Koncentracija produkta u stacionarnom stanju je:

$$\frac{d}{dt}p = \underline{k_2 \cdot ES - D \cdot p} = 0$$

$$D \cdot p = k_2 \cdot ES$$

$$p = \frac{k_2}{D} \cdot ES \quad \rightarrow \underline{r = k_2 \cdot ES} = v_M \cdot \frac{s}{K_M + s}$$

$$p = \frac{v_M}{D} \cdot \frac{s}{K_M + s}$$

Odredili smo izraz za izračunavanje koncentracije produkta u stacionarnom stanju.

Da bi se primijenio algoritam Jacobi-jeve linearne iteracije, preuredimo izraz

$$0 = D \cdot (s_0 - s) - v_M \cdot \frac{s}{K_M + s}$$

u oblik $x = g(x)$, odnosno za ovaj primjer $s = g(s)$.

Preuređeni oblik bilance je tada:

$$s = s_0 - \frac{v_M}{D} \cdot \frac{s}{K_M + s}$$

Algoritam Jacobi-jevih linearnih iteracija za izračunavanje koncentracije supstrata u stacionarnom stanju dan je izrazom:

$$s_{k+1} = s_0 - \frac{v_M}{D} \cdot \frac{s_k}{K_M + s_k}$$

$$k=1, 2, \dots, N$$

indeks k je redni broj iteracije.

Uvjet konvergencije je: $|g'(s)| < 1$

Odredimo li derivaciju, uvjet konvergencije postaje:

$$\frac{v_M}{D} \cdot \frac{K_M}{(K_M + s)^2} < 1$$

Primijenimo li Newton-Raphson-ovu iteraciju

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

za bilancu supstrata u stacionarnom stanju

$$0 = D \cdot (s_0 - s) - v_M \cdot \frac{s}{K_M + s}$$

dobije se Newton-Raphson-ov izraz za izračunavanje koncentracije supstrata u stacionarnom stanju:

$$s_{k+1} = s_k + \frac{D \cdot (s_0 - s_k) - v_M \cdot \frac{s_k}{K_M + s_k}}{D + v_M \cdot \frac{K_M}{(K_M + s_k)^2}}$$

Enzim	Supstrat	T(°C)	pH	k_2 (1/s)	$1/K_M$ (M^{-1})
pepsin	carbobenzoxy-l-glutamyl-l-tyrosine ethyl ester	31,5	4,0	0,00108	530
	carbobenzoxy-l-glutamyl-l-tyrosine	31,6	4,0	0,00141	560

Enzim je biološki katalizator.

Enzimi su neophodni za život kakav poznajemo, jer su mnoge reakcije koje se odvijaju u stanicama organizma prespore te bi vodile do bitno drugačijih produkata koje organizmu ili ne trebaju, ili bi štetili.

Kao i svi katalizatori, enzimi funkcioniraju na način da **snižavaju energiju aktivacije pojedine reakcije**, te na taj način **reakcije ubrzavaju i do nekoliko milijuna puta**.

Enzim ostaje **nepromijenjen čitavim trajanjem reakcije** na koju utječe što mu omogućava da, kad se jedna reakcija privede kraju, uključi u drugu potpuno nepromijenjen.

Na aktivnost enzima mogu utjecati različite molekule.

Aktivatori su pak molekule koje povećavaju aktivnost enzima.

Inhibitori, prirodni ili umjetni stvoreni u laboratoriju, su molekule koji ili umanjuju aktivnost enzima, ili je potpuno uništavaju.

Neki su inhibitori korisni, a neki su štetni i opasni.

Mnogi lijekovi su ustvari **inhibitori** enzima.

Npr. aspirin je inhibitor enzima koji rezultira stvaranjem prostaglandina (inflamatorna molekula), te tako stopira bol i inflamaciju.

Otrov cijanid deaktivira enzim citokrom C oksidazu i na taj način blokira stanično disanje.

Da u ljudskom tijelu nema enzima, umrli bismo.

Enzimi služe kao katalizatori biokemijskih reakcija.

Bez njih ne bismo mogli izvoditi vitalne reakcije poput kopiranja DNK i probave hrane.

Također su potrebni da bi se dogodila kataliza, koja tijelu daje količinu aktivacijske energije.

Proteinski enzimi čine veliku većinu enzima u ljudskom tijelu.

Katabolizam – proces koji oslobađa energiju u našem tijelu.

Velike molekule iz hrane (ugljikohidrati, masti i bjelančevine) razgrađuju se na manje molekule.

Tako nastaje energija koja osigurava gorivo za metaboličke, toplinske i mehaničke procese (održavanje tjelesne temperature i gibanje mišića).

Katabolizam bjelančevina – enzimi ?

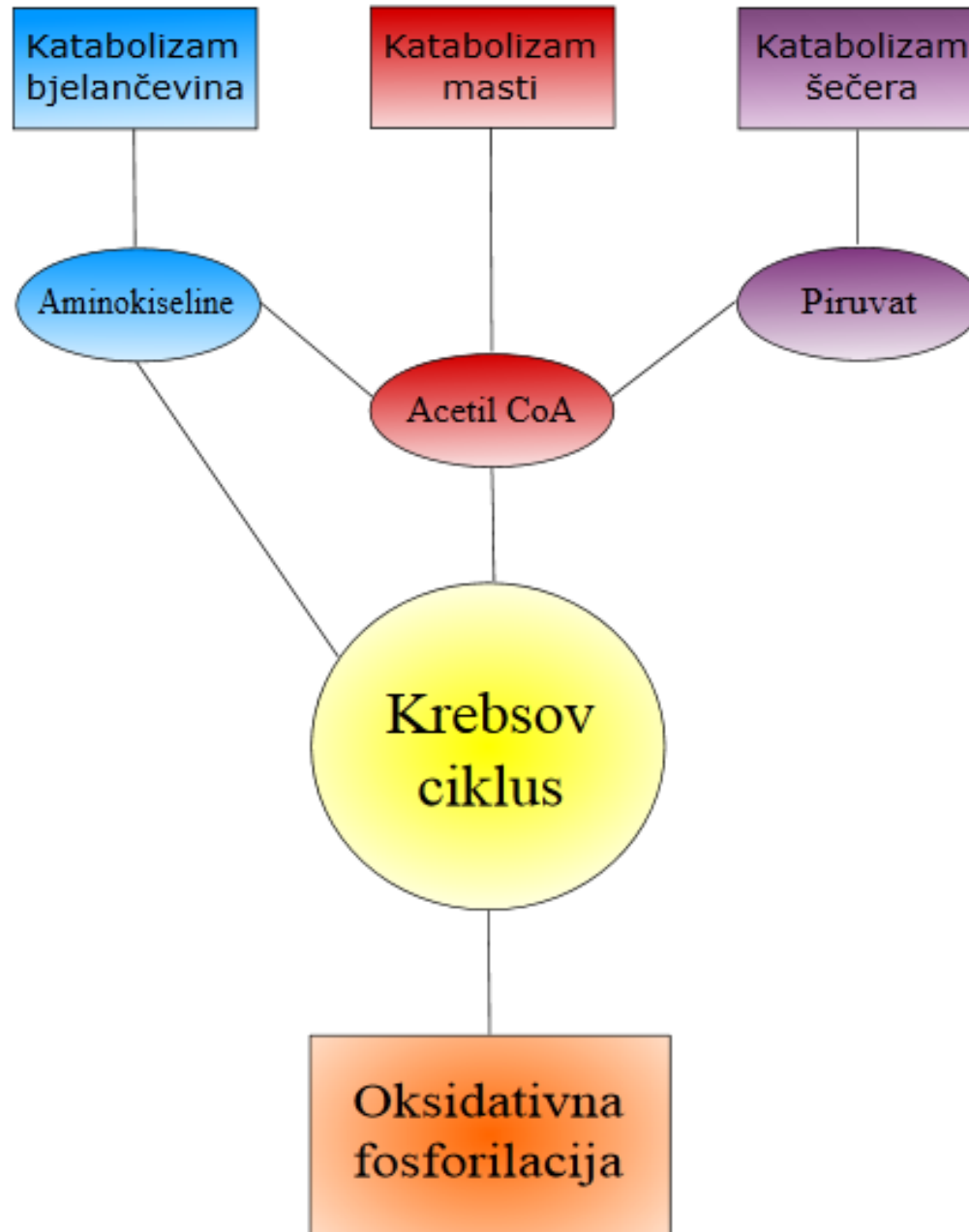
pepsin, tripsin, chymotripsin, aminopeptidaze, ...

Katabolizam masti – enzimi ?

lipaze, dehidrataza, hidrolaza, oksidaza, transferaza, ...

Katabolizam ugljikohidrata – enzimi ?


glikolaza, laktaza, dehidrogenaza, sintetaza, ...



Supstrati, enzimi i produkti u Krebsovom ciklusu

	Supstrat	Koenzim	Enzim	Vrsta reakcije	Inibitori	Aktivatori	Produkt
1	oksalacetat	acetil-CoA, voda	citrat sintetaza	kondenzacija	citrat, NADH, sukcinil-CoA	-	citrat
2a	citrat	-	akonitaza	dehidracija	-	-	Izocitrat
2b	cis-akonitat	voda		hidracija	-	-	cis-akonitat, voda
3a	izocitrat	NAD ⁺	izocitrat dehidrogenaza	oksidacija	NADH, ATP	Ca ²⁺ , ADP	α-ketoglutarat, CO ₂
3b	oksalsukcinat	H ⁺		dekarboksilacija			oksalsukcinat, NADH
4	α-ketoglutarat	NAD ⁺ , CoA-SH	α-ketoglutarat dehidrogenaza	oksidativna dekarboksilacija	NADH, sukcinil-CoA	Ca ²⁺	sukcinil-CoA, NADH, CO ₂
5	sukcinil-CoA	GDP, fosfat	sukcinil-CoA sintetaza	fosforilacija	-	-	sukcinat, GTP, CoA-SH
6	sukcinat	FAD	sukcinat dehidrogenaza	oksidacija	-	-	fumarat, FADH ₂
7	fumarat	voda	fumaraza	hidracija	-	-	L-malat
8	L-malat	NAD ⁺	malat dehidrogenaza	oksidacija	-	-	oksalacetat, NADH

Izvor: Wikipedia: Krebsov ciklus. 2012. http://hr.wikipedia.org/wiki/Krebsov_ciklus [4.11.2012.]

- 
- Prepoznajete li važnost enzima u prehrambenom inženjerstvu?
 - A važnost enzima u metaboličkim procesima?
 - Imate li ideju kako ubrzati probavu (metaboličke procese)?
 - Zašto žvačemo hranu?
 - Zašto je uz meso i masnu hranu dobro jesti salatu?
 - Razumijete li sada važnost temperature vode u perilici pri pranju deterdžentom s dodatkom enzima?

Jacobi-jev iterativni izraz za izračunavanje koncentracije supstrata u stacionarnom stanju:

$$s_{k+1} = s_0 - \frac{v_M}{D} \cdot \frac{s_k}{K_M + s_k}$$

Newton-Raphson-ov iterativni izraz za izračunavanje koncentracije supstrata u stacionarnom stanju:

$$s_{k+1} = s_k + \frac{D \cdot (s_0 - s_k) - v_M \cdot \frac{s_k}{K_M + s_k}}{D + v_M \cdot \frac{K_M}{(K_M + s_k)^2}}$$

Kada odredimo koncentraciju supstrata, uvrstimo ju u izraz za koncentraciju produkta u stacionarnom stanju:


$$p = \frac{v_M}{D} \cdot \frac{s}{K_M + s}$$

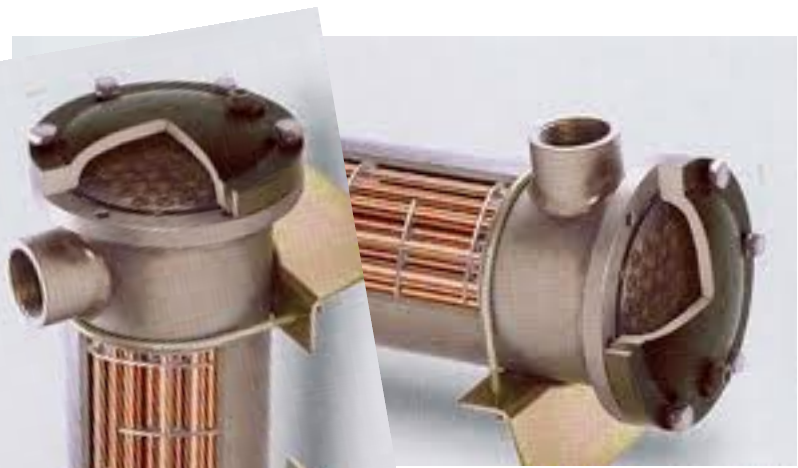
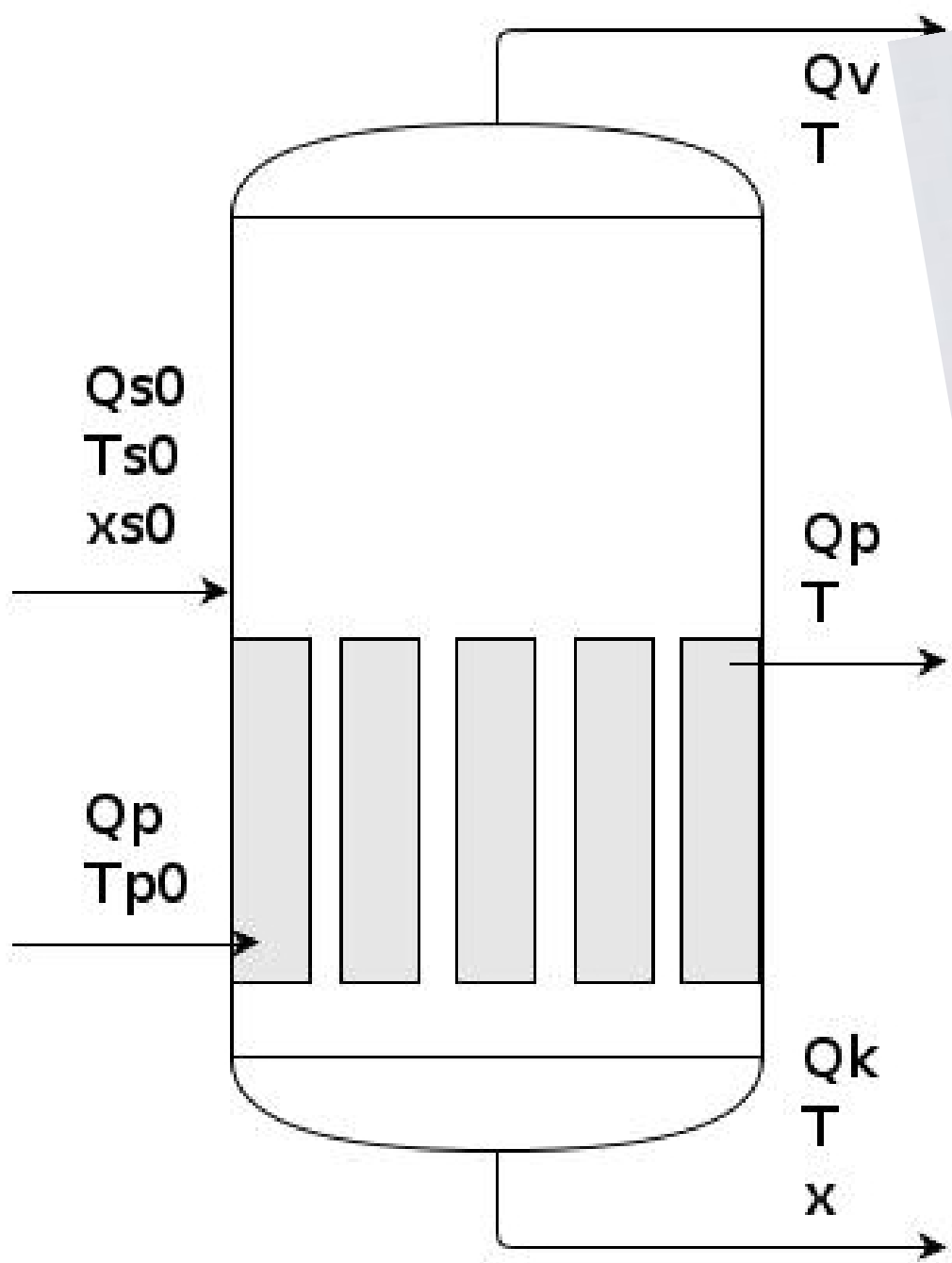


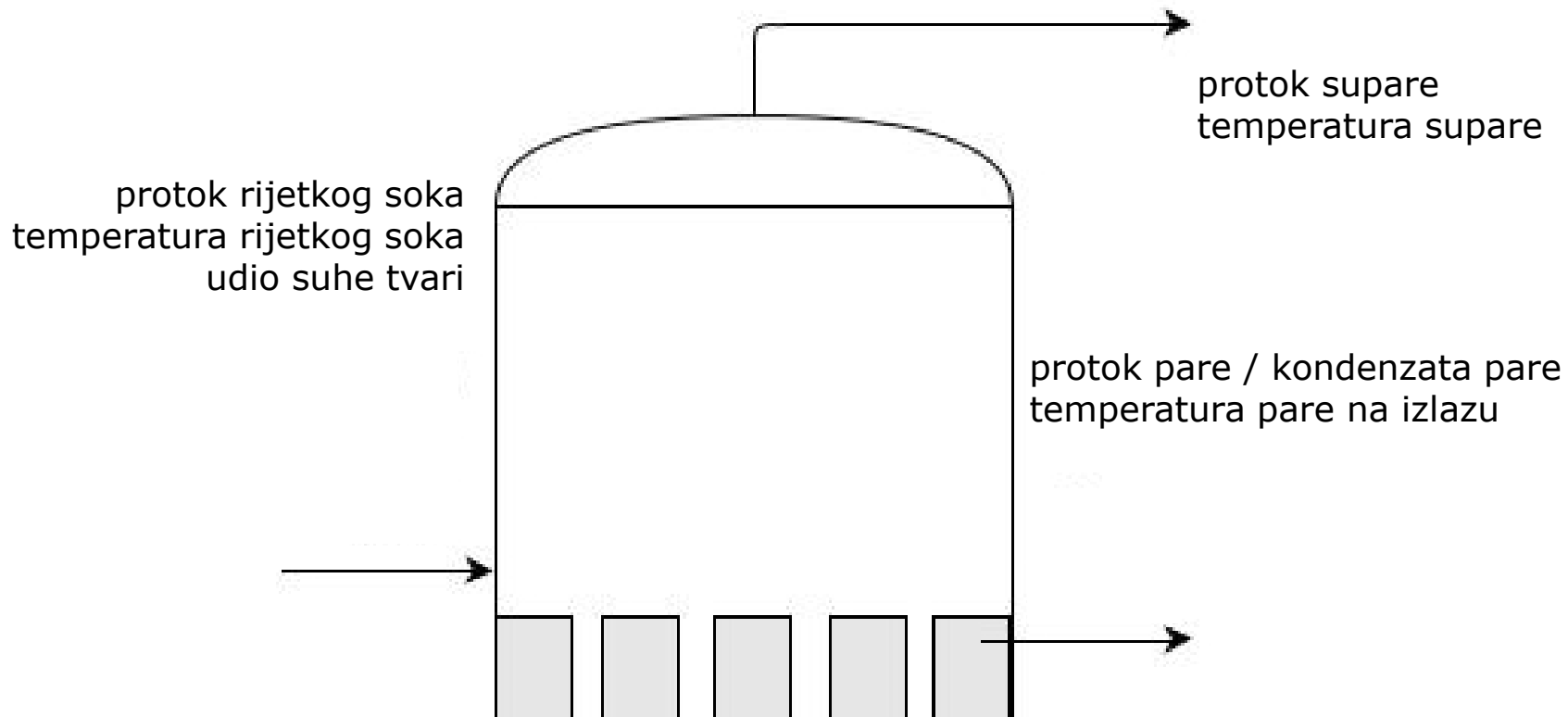
2.3. Matematički modeli nelinearnih sustava i njihovih stacionarnih stanja

Model stacionarnih i dinamičkih stanja pH
u protočnom reaktoru

Model jednostrukog uparivača
i uparne stanice s tri stupnja uparivanja

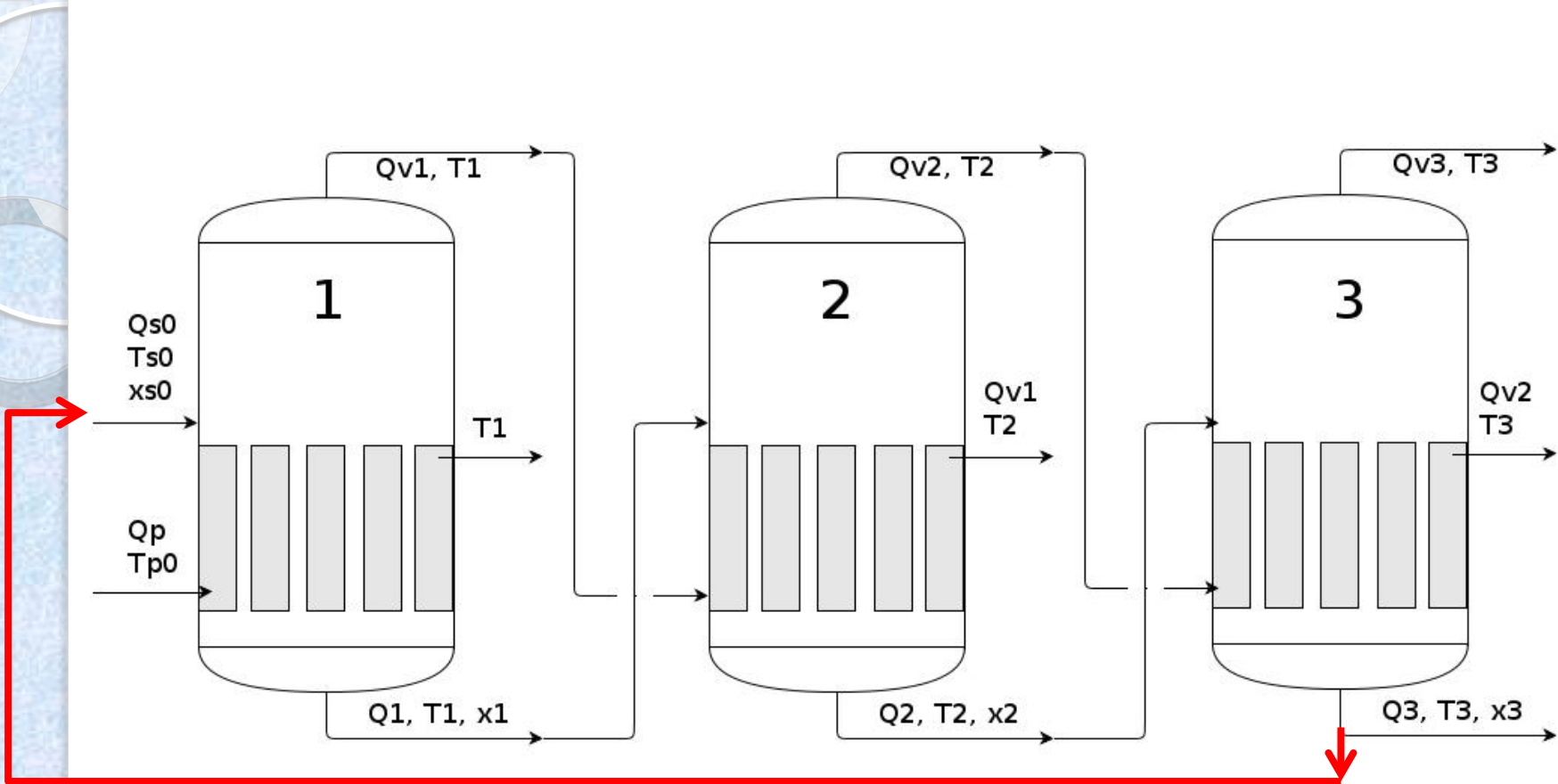
- 
- I nelinearni sustavi imaju stacionarna stanja





$$\text{efikasnost uparavanja} = \frac{Q_V}{Q_P}$$

Proces se projektira i vodi tako da se postigne **maksimalna efikasnost uparavanja**, za zadane vrijednosti udjela suhe tvari u u rijetkom (ulazna sirovina) i koncentriranom soku (proizvod), **uz maksimalno zadržavanje kakvoće proizvoda**.



kriteriji optimalnog upravljanja

$$\max \left[f(Q_P, T_P) = \frac{Q_V}{Q_P} \right]$$

$$\frac{d}{dt} (\text{nutrijenti}_0) \cong 0$$

Pritok rijetkog soka

Izvor:
Discover Engineering
https://www.youtube.com/watch?v=N7iIzKA5xh8&ab_channel=Howden

Pritok pare

Isparivač

Odzračivanje
Izlaz kondenzata
pare

Izlaz koncentrata

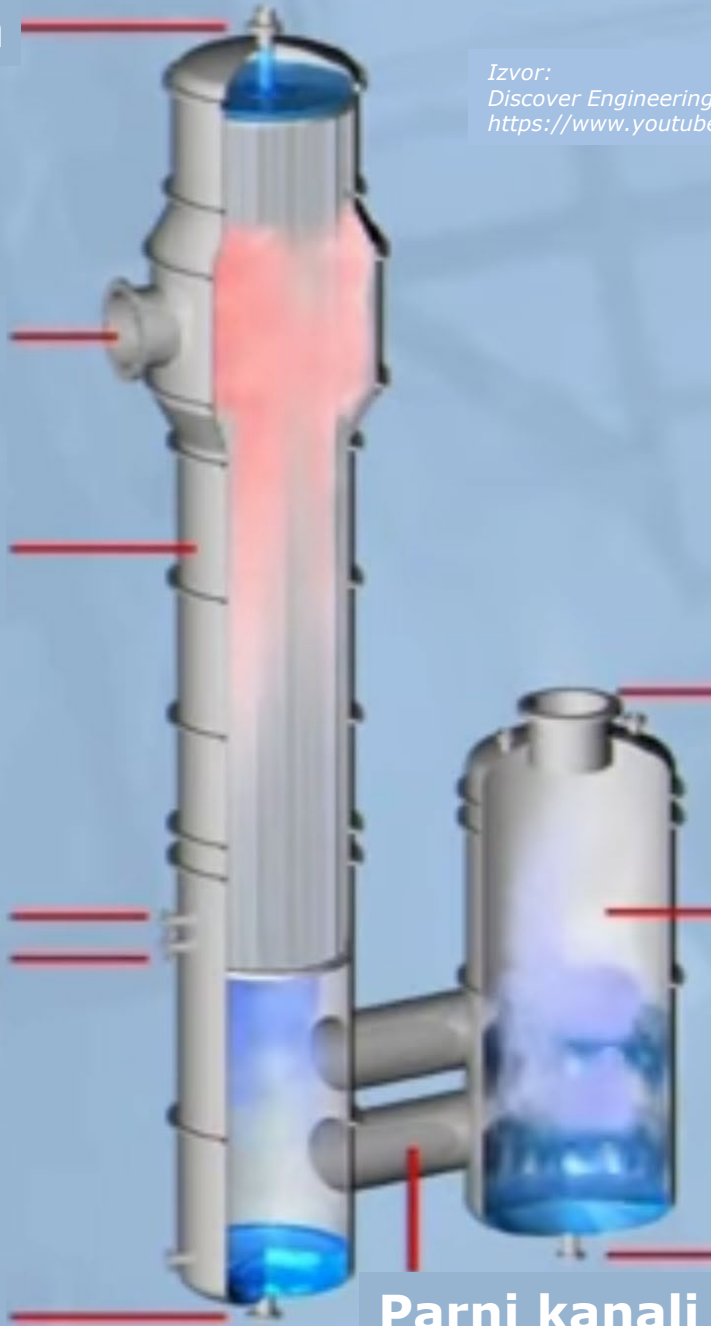
Izlaz pare

Separator

Izlaz koncentrata

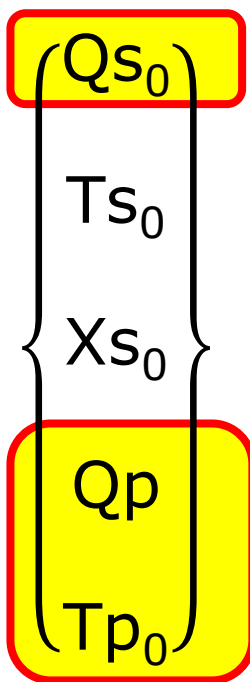
Parni kanali

Animation: INware

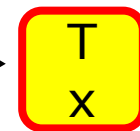
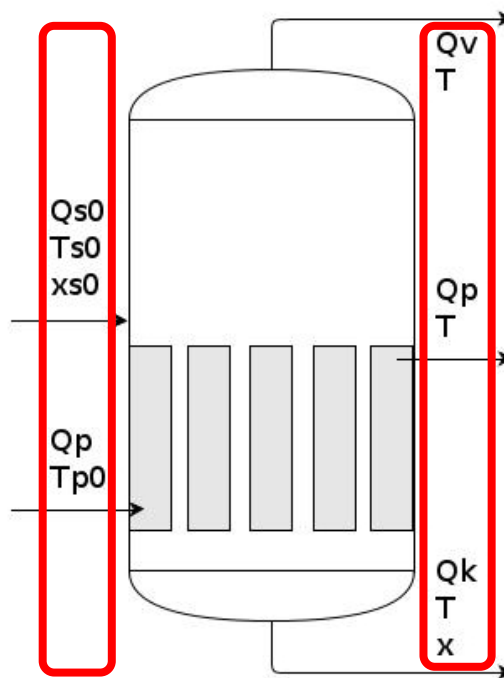


ulazne veličine

izlazne veličine




upravljačke veličine



veličine stanja

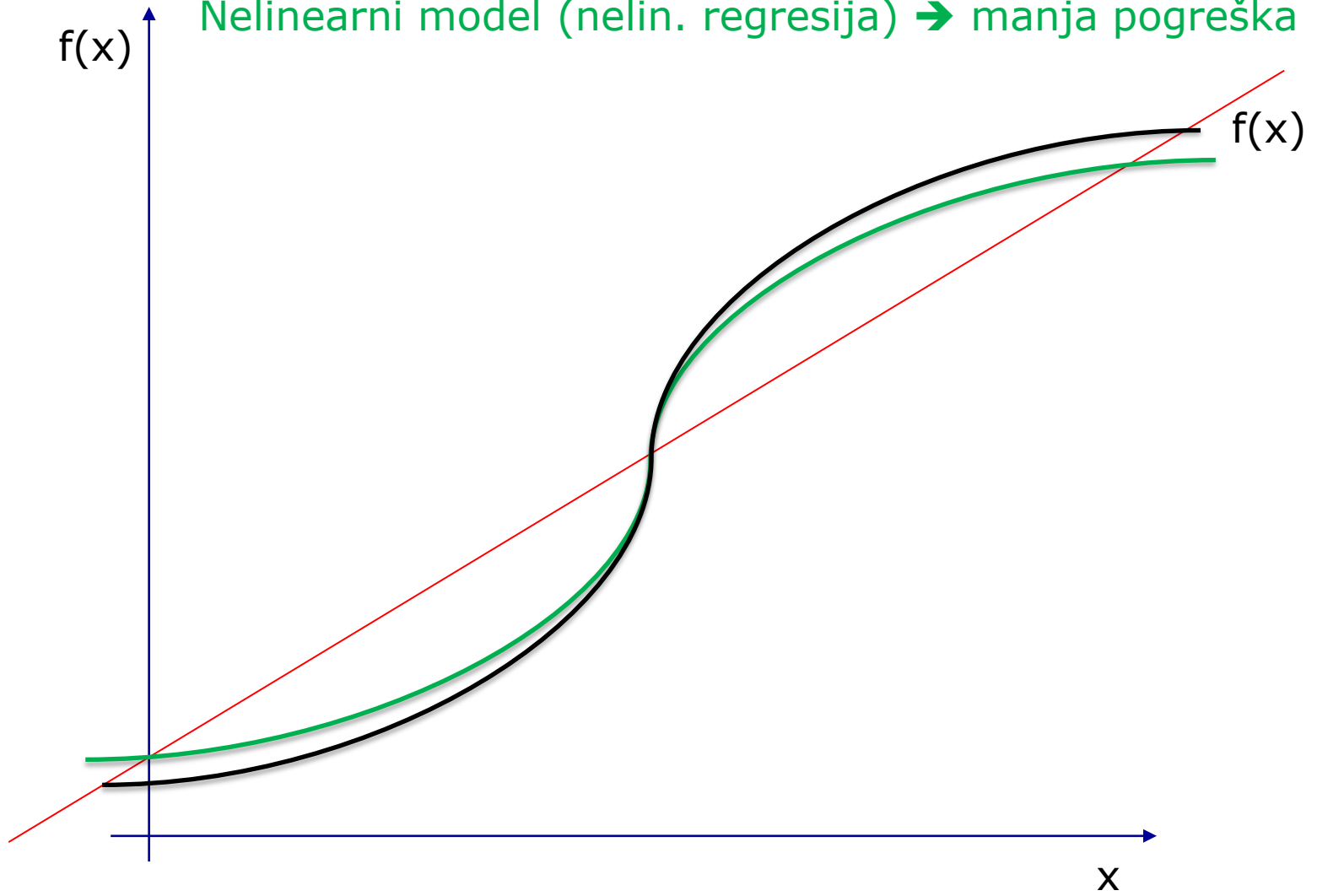
Tehnološke značajke procesa

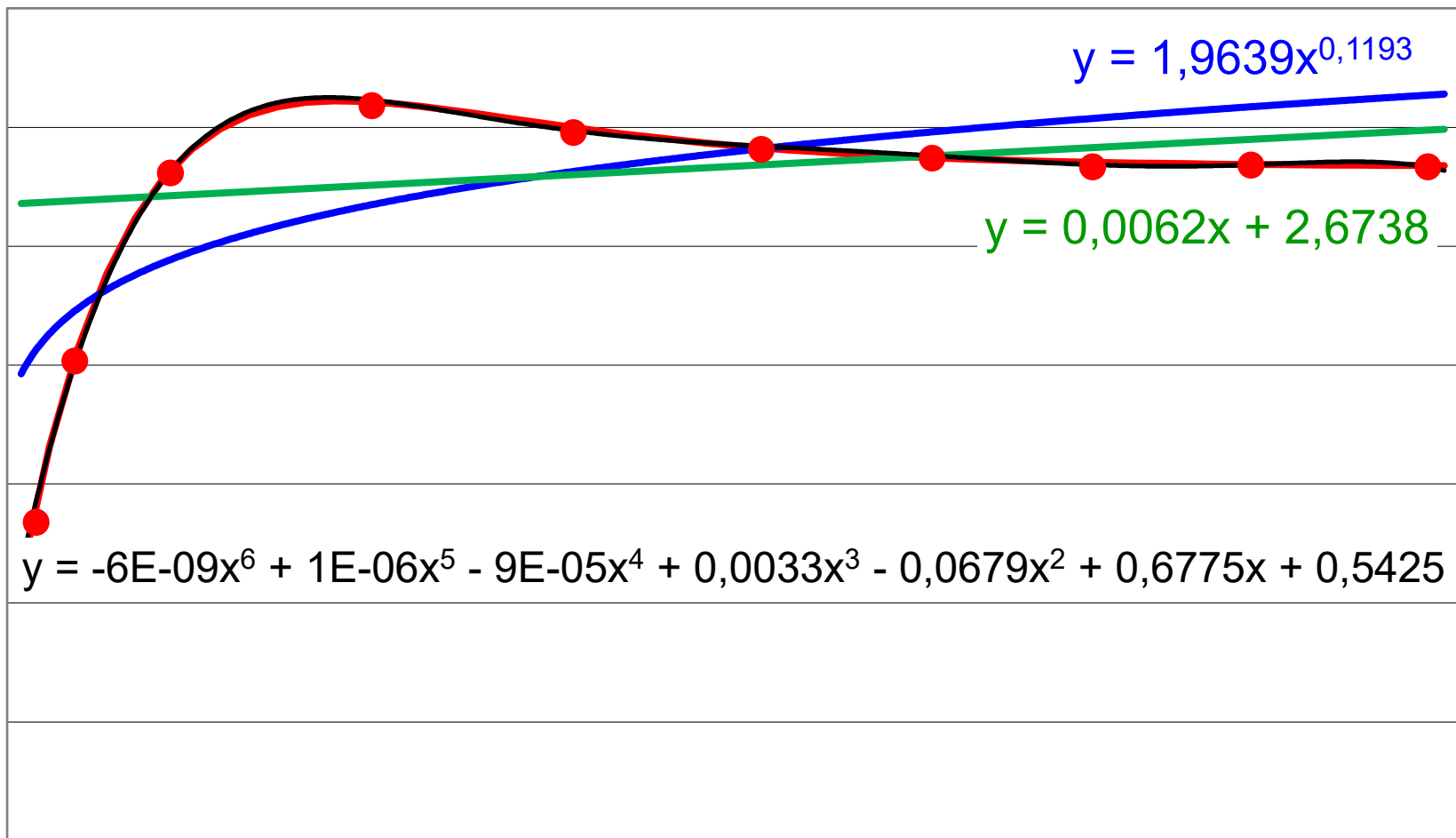
- proces je skup jer su potrebne velike količine pare (energije)
- odvija se na visokoj temperaturi
- može doći do degradacije proizvoda
(*smanjenje nutritivne vrijednosti i organoleptičkih svojstava*)
- **proces je nelinearan**
- bilance je relativno jednostavno modelirati
- ali teško je matematički izraziti koeficijent prijenosa topline za newton-ovsku tekućinu s promjenjivim udjelom suhe tvari
- **proizvod je suha tvar** koju tijekom procesa koncentriramo
- **proces vodimo optimirajući djelatvornost uparavanja**
- djelatvornost je **omjer protoka supare i protoka zasićene pare**

- 
- složenost određivanja koeficijenta prijenosa topline zbog promjenjivog udjela suhe tvari čini model zahtjevnim
 - maseni udio suhe tvari bitno utječe na reološka i termofizička svojstva koncentrata (specifičnu toplinu, koeficijent toplinske vodljivosti i toplinski difuzivitet)
 - **funkcionalna ovisnost navedenih parametara o udjelu suhe tvari** određuje se na temelju eksperimentalnih istraživanja u laboratorijskim uvjetima, **nelinearna je** i ima oblik krivulje
 - na temelju izmjerenih podataka izrađuju se regresijski modeli
 - nelinearni regresijski modeli točnije aproksimiraju krivulju

Linearni model (lin. Regresija) → velika pogreška

Nelinearni model (nelin. regresija) → manja pogreška





- Krivulja zadane funkcije
- Eksponencijalna regresija
- Linearna regresija
- Polinomna regresija 6. stupnja

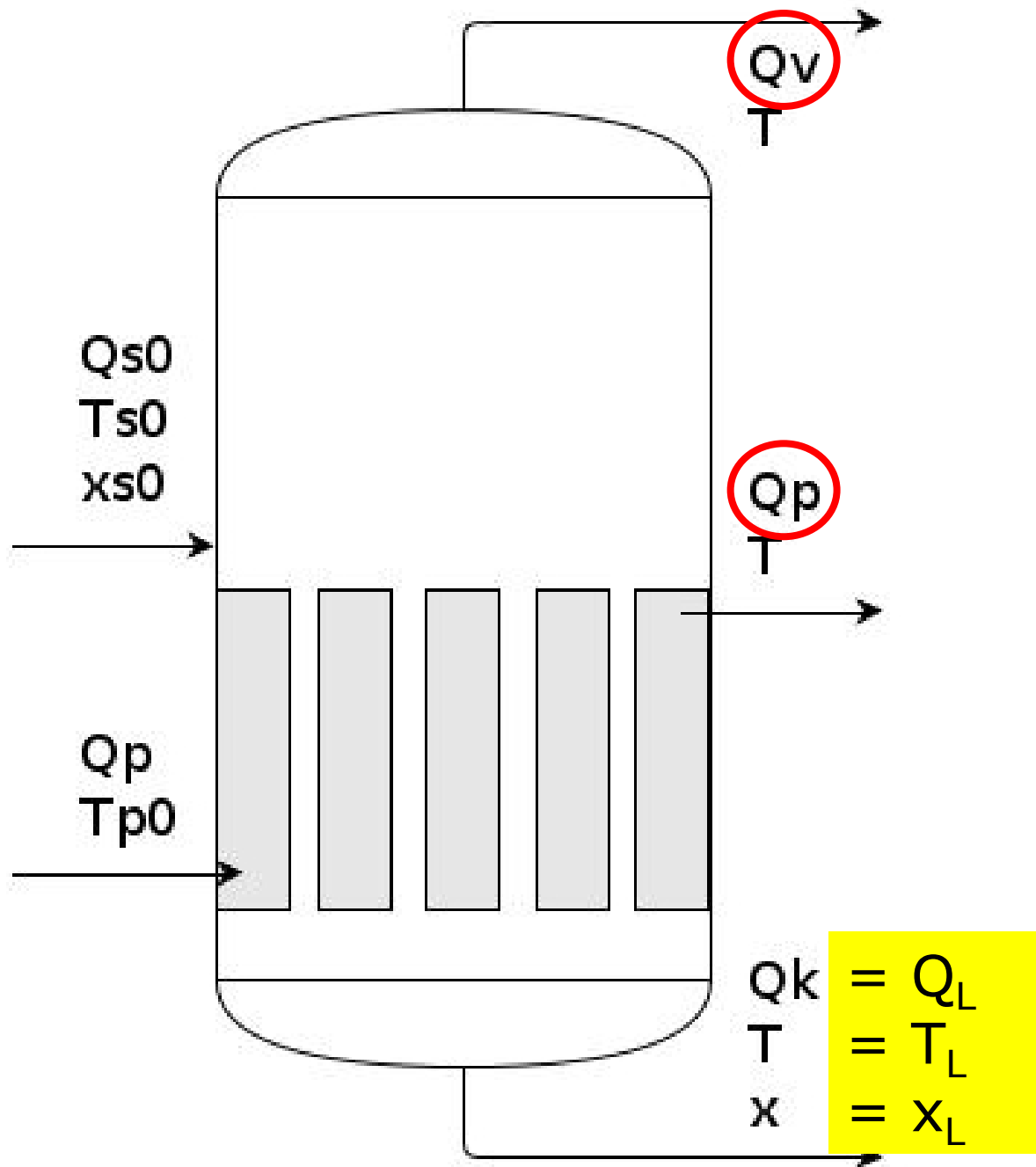
Bilance stacionarnih stanja

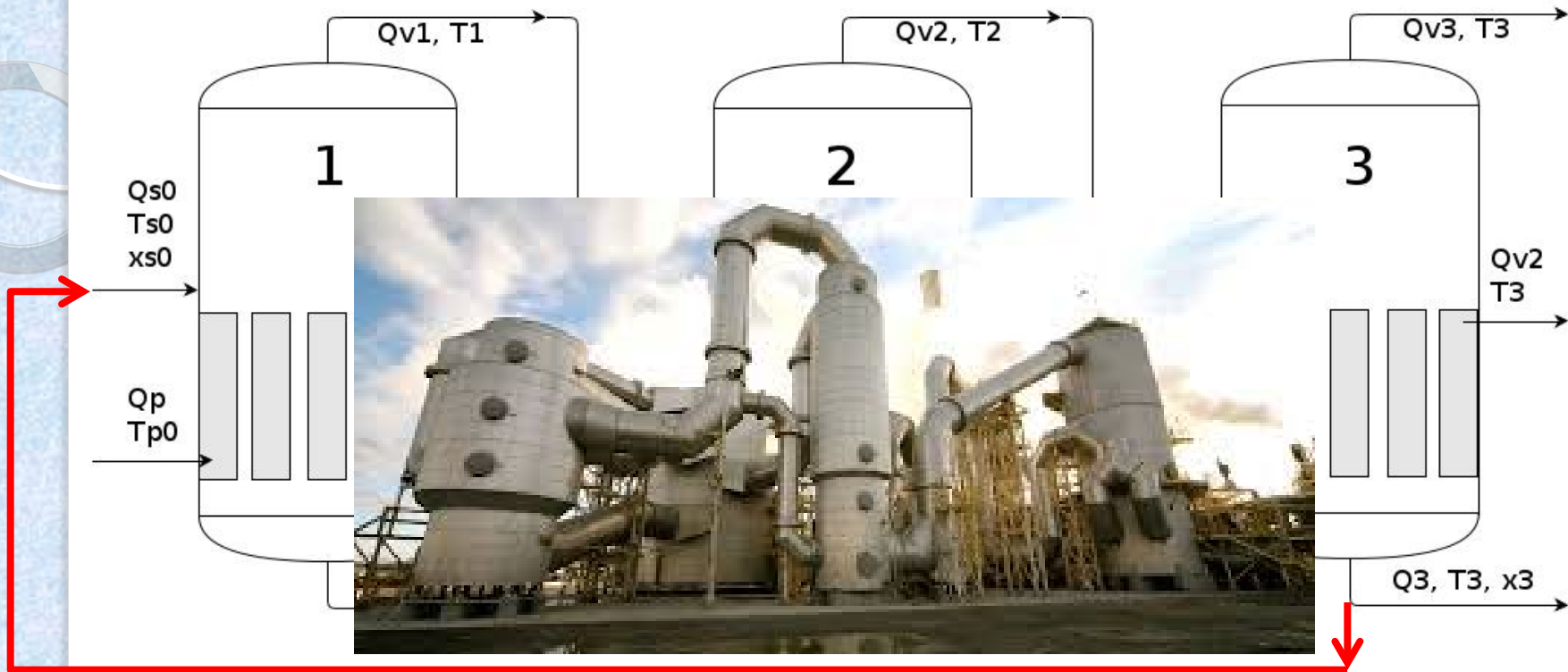
Pretpostavke:

- zanemarive su kemijske pretvorbe i njihov utjecaj na bilance mase i energije
- nema promjene akumulacije mase i energije, $\frac{d}{dt}(m, E) = 0$
- maseni udio suhe tvari (proizvoda) je sačuvan

Model se temelji na sljedećim bilancama:

1. ukupna bilanca mase
2. bilanca mase suhe tvari
3. ukupna bilanca energije
4. bilanca energije vodene pare





$$E_1 = \frac{Q_{v1}}{Q_p}$$

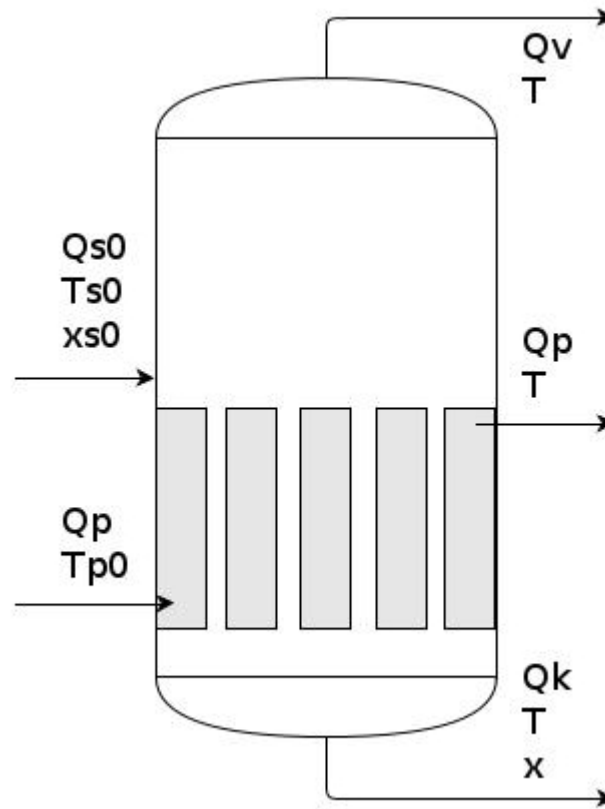
$$E_2 = \frac{Q_{v2}}{Q_{v1}}$$

$$E_3 = \frac{Q_{v3}}{Q_{v2}}$$

$$E = \frac{Q_{v3}}{Q_p}$$

ulazne veličine

izlazne veličine



ukupna bilanca mase: $Q = \text{maseni protok}$

$$Q_{S0} + Q_P = Q_L + Q_V + Q_P$$

bilanca mase suhe tvari:

$$Q_{S0} \cdot x_0 = Q_L \cdot x(T)$$

ukupna bilanca energ

Energija koju
odnosi supara

Energija koju
odnosi koncentrat

Energija koju
odnosi para

$$Q_{S0} \cdot c_P(x_0) \cdot T_{S0} + Q_P \cdot i_P(T_{P0}) = Q_V \cdot i_V(T) + Q_L \cdot c_P(x) \cdot T + Q_P \cdot i_P(T)$$

Energija koju
donosi rijetki sok

Energija koju
donosi para

=

bilanca energije za vodenu paru:

$$Q_P \cdot [i_P(T_{P0}) - i_V(T)] = S \cdot h(x) \cdot (T_{P0} - T)$$

Specifična toplina

je

količina topline

koju jedinica količine tvari treba primiti

da bi joj se temperatura podigla za jedinicu temperature.

Litra vode nema jednaki c_p pri 10, 15 i 20 °C. Stoga se razlikuje i količina topline koju je vodi potrebno dovesti da bi joj se temperatura povećala s 10 na 11, s 15 na 16 ili s 20 na 21 °C.

Voda ima jedan od najvećih specifičnih toplinskih kapaciteta, čija vrijednost pri sobnoj temperaturi iznosi:

$$c_p(\text{H}_2\text{O}) \sim 4,2 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1} = 4181,3 \text{ J g}^{-1}\text{K}^{-1}$$

$$c_p(\text{led}) \sim 2,1 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1} = 2100 \text{ J g}^{-1}\text{K}^{-1}$$

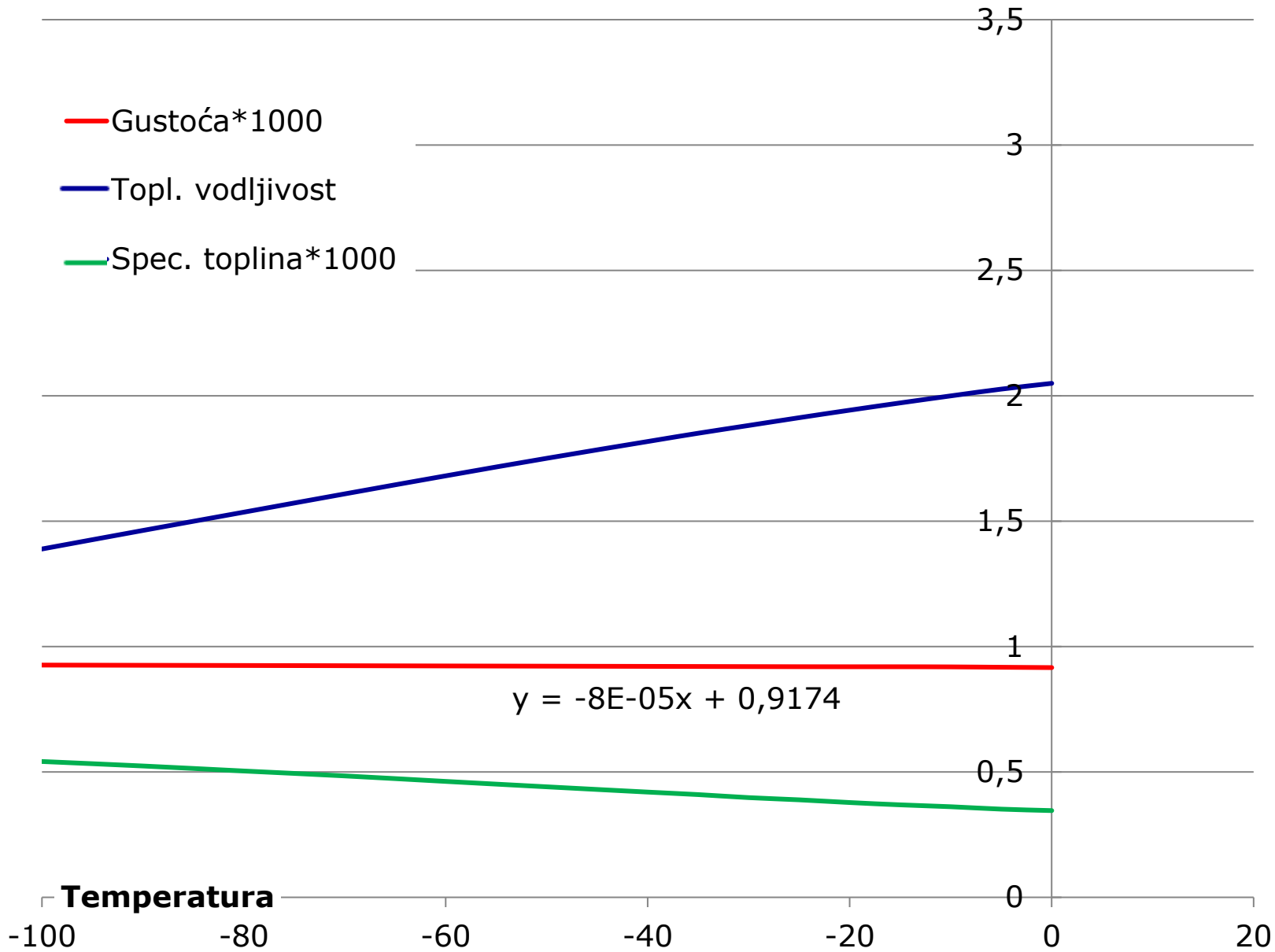
Entalpija je mjera za unutarnji sadržaj toplinske energije.

Toplinska vodljivost tvari jednaka je količini topline koju provodi kroz jedinicu površine, u jedinici vremena, pri standardnim uvjetima, a da se pritom vrijednost temperature smanji za jedan stupanj (1 K) na jedinici puta u smjeru strujanja topline. *(Jednaka količina topline potrebna je i za 1 °C.)*

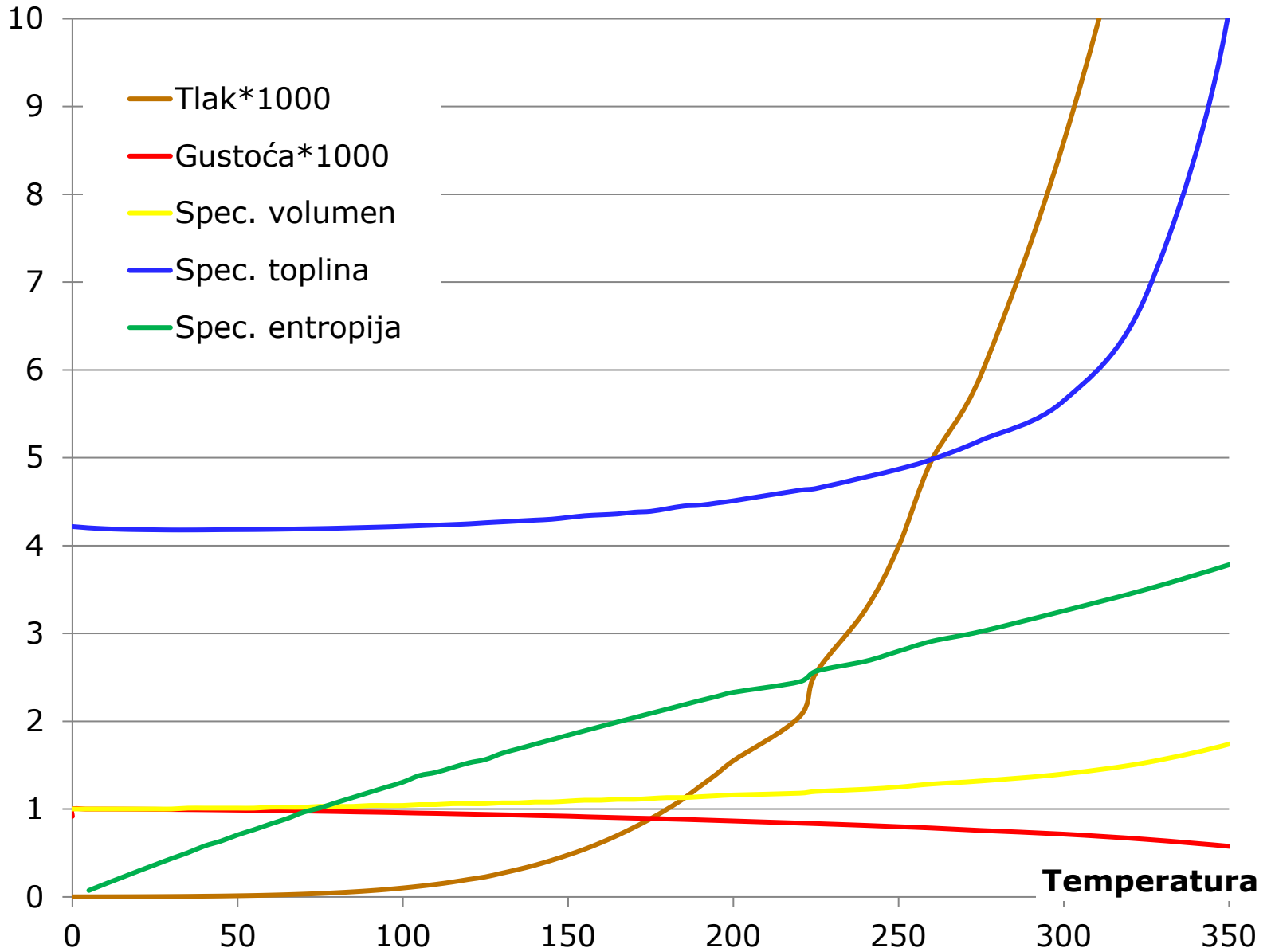
(20 °C)	Koeficijent toplinske vodljivosti <i>(W m⁻¹K⁻¹)</i>	Gustoća <i>(kg m⁻³)</i>	Volumetrijski toplinski kapacitet <i>(10⁶ J m⁻³ K⁻¹)</i>	Toplinska difuzivnost <i>(10⁻⁸ m² s⁻¹)</i>
brašno	0,45	593		
šećer	0,1-0,2	961		
etanol	0,171	789		7
ulje	0,138	918		7,38
mlijeko	0,53			
zrak	0,025	1,204	0,001	1938
voda	0,609	998	3,073	9
para	0,0184	0,6		
led*	2,18	917		

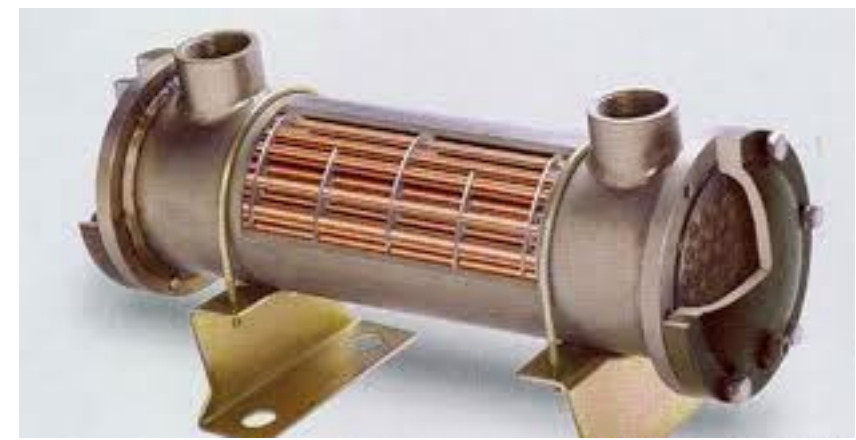
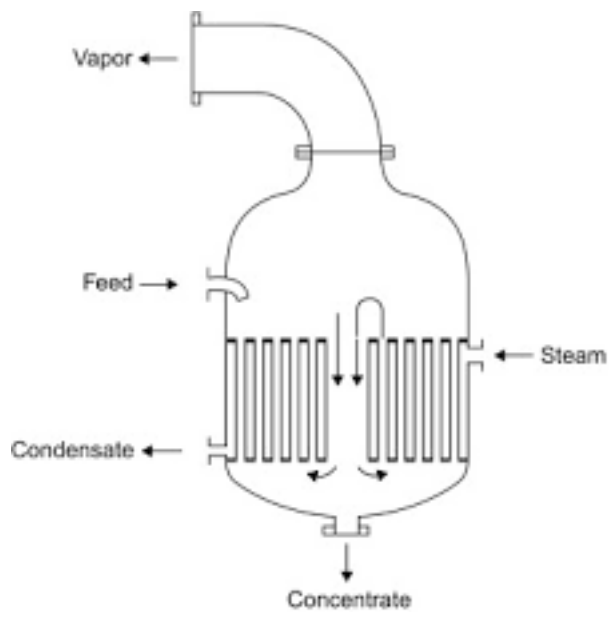
*vrijednost za led pri 0 °C

Toplinska svojstva leda

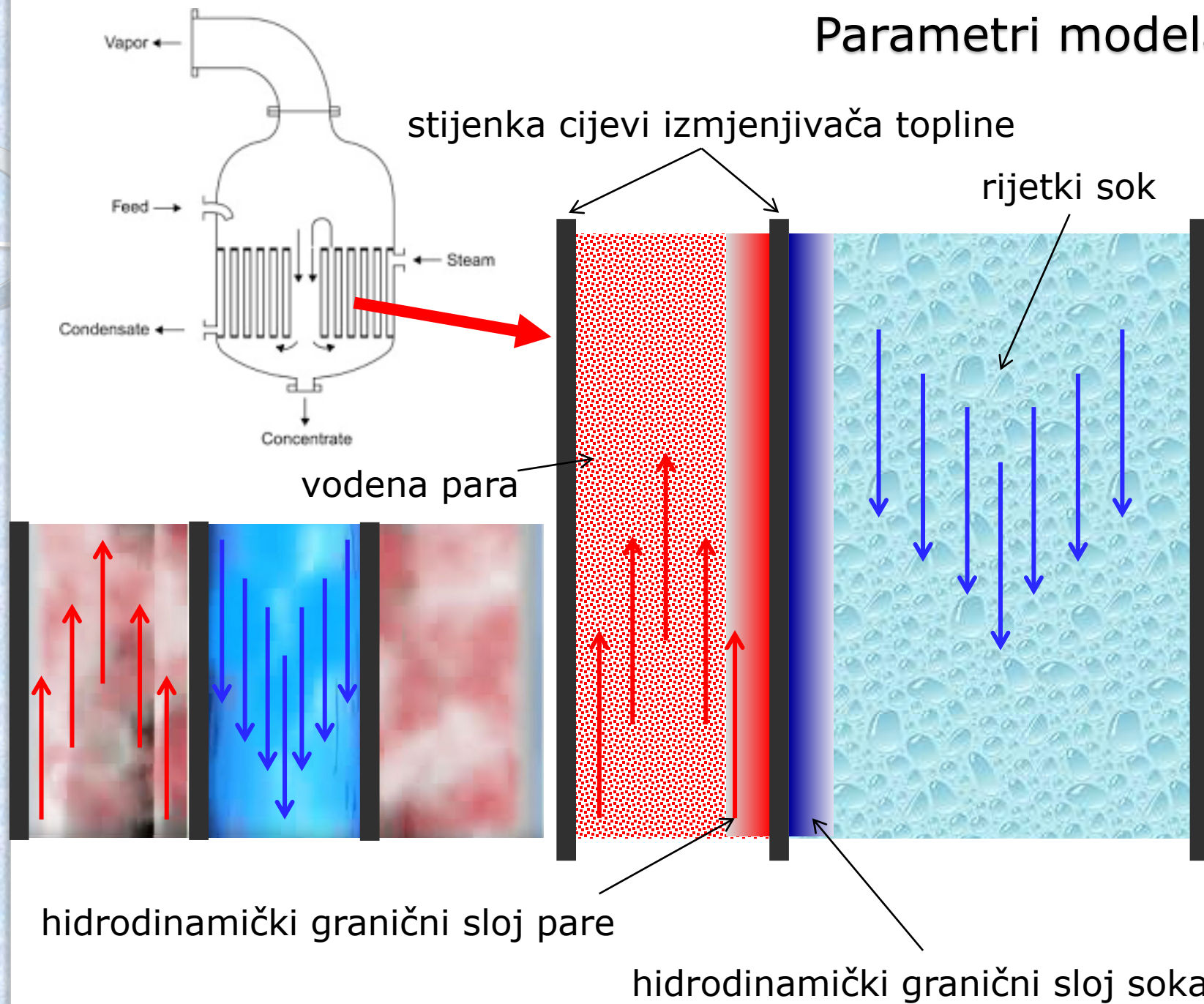


Toplinska svojstva vode



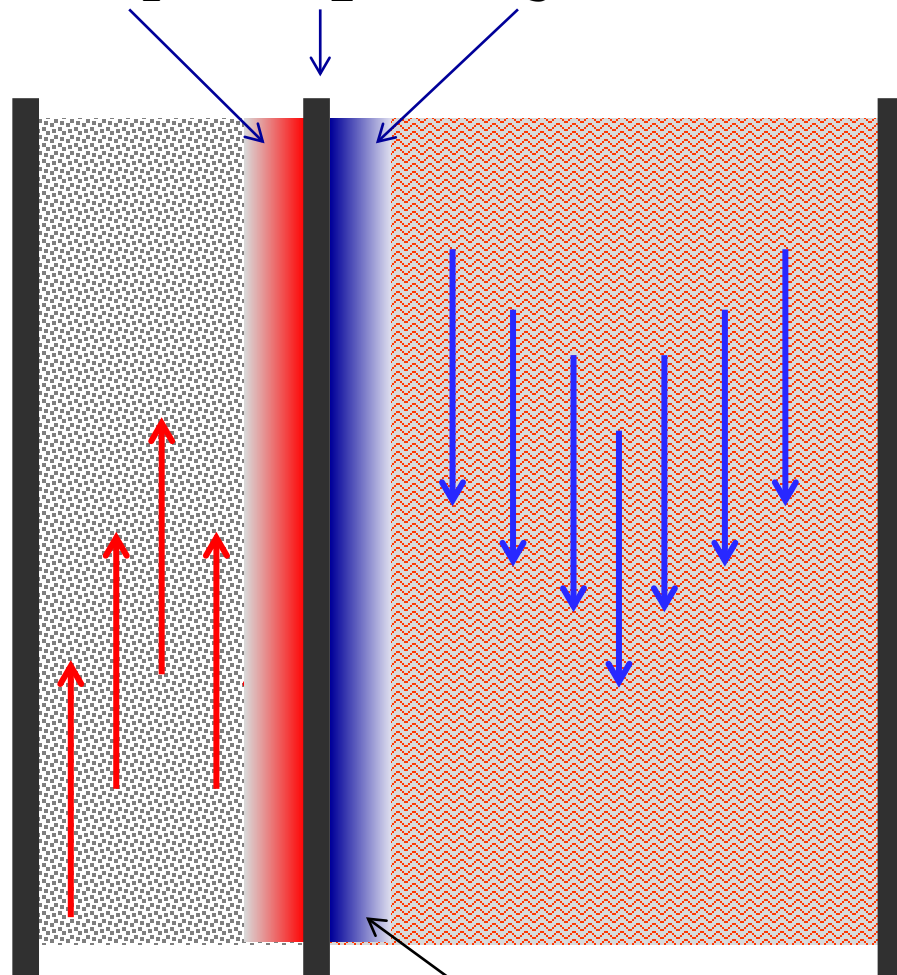


Parametri modela

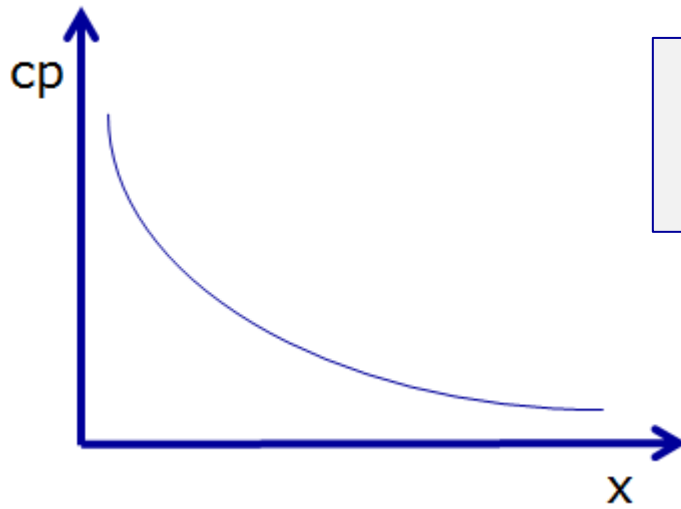


Otpori prijenosu topline

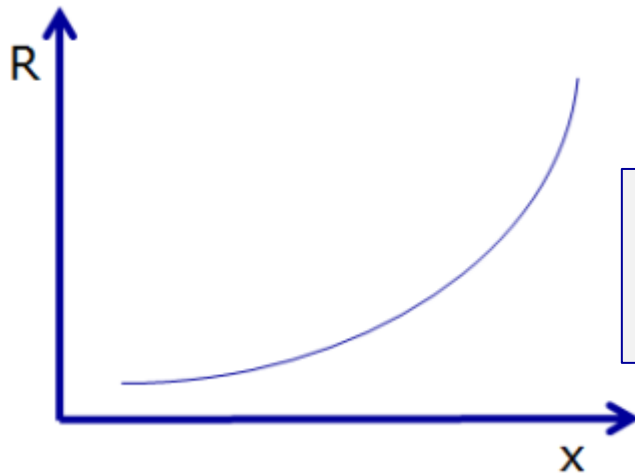
$$R = R_1 + R_2 + R_3$$



najvažniji parametar



specifični toplinski kapacitet materijala opada smanjenjem udjela vode i porastom udjela suhe tvari



otpor prijenosu topline kroz materijal raste smanjenjem udjela vode i porastom udjela suhe tvari

$$R = R_1 + R_2 + R_3$$

ukupna bilanca mase: $Q = \text{maseni protok}$

$$Q_{S0} + Q_P = Q_L + Q_V + Q_P$$

bilanca mase suhe tvari:

$$Q_{S0} \cdot x_0 = Q_L \cdot x(T)$$

ukupna bilanca energije:

$$Q_{S0} \cdot c_P(x) \cdot T_{S0} + Q_P \cdot i_P(T_{P0}) = Q_V \cdot i_P(T) + Q_L \cdot c_P(x) \cdot T + Q_P \cdot i_V(T)$$

bilanca energije za vodenu paru:

$$Q_P \cdot [i_P(T_{P0}) - i_V(T)] = S \cdot h(x) \cdot (T_{P0} - T)$$

$$Q_L = Q_{S0} \cdot \frac{x_0}{x}$$

$$Q_V = Q_{S0} \cdot \left(1 - \frac{x_0}{x}\right)$$

bilanca mase suhe tvari:

- četiri nelinearne bilance/iednadžbe pretvaramo u dvije

- veličine star $Q_{S0} \cdot x_0 = Q_L \cdot x(T)$

- želimo znati uilo suhe tvari i temperaturu koncentrata

- uvrštavanjem u bilance energije dobijemo sljedeće izraze:

$$f_1(x, T) = Q_{S0} \cdot \left(1 - \frac{x_0}{x}\right) \cdot i_P(T) + Q_{S0} \cdot \frac{x_0}{x} \cdot c_P(x) \cdot T \\ + Q_P \cdot i_V(T) - Q_{S0} \cdot c_P(x_0) \cdot T_{S0} - Q_P \cdot i_P(T_{P0})$$

$$f_2(x, T) = Q_P \cdot [i_P(T_{P0}) - i_V(T)] - h(x) \cdot S \cdot (T_{P0} - T)$$

- model je pojednostavljen smanjenjem broja jednažbi sa četiri (bilance/jednažbe) na dvije (nelinearne jednažbe)
- nelinearne jednažbe rješavamo Newton-Raphson-ovom metodom

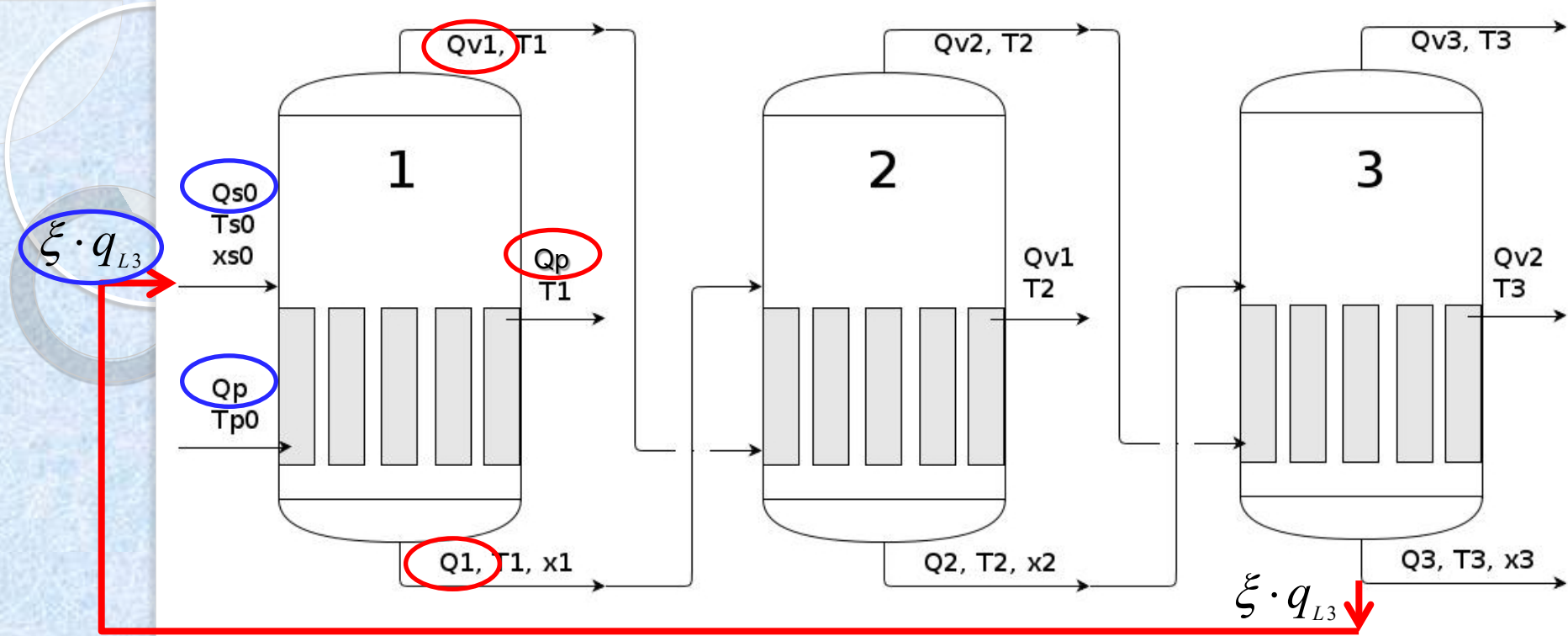
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$f_1(x, T) = Q_{S0} \cdot \left(1 - \frac{x_0}{x}\right) \cdot i_P(T) + Q_{S0} \cdot \frac{x_0}{x} \cdot c_P(x) \cdot T + Q_P \cdot i_V(T) - Q_{S0} \cdot c_P(x_0) \cdot T_{S0} - Q_P \cdot i_P(T_{P0})$$

$$f_2(x, T) = Q_P \cdot [i_P(T_{P0}) - i_V(T)] - h(x) \cdot S \cdot (T_{P0} - T)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - f'(x_k)^{-1} \cdot f(x_k)$$

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ T_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ T_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial T} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial T} \end{pmatrix}_{(x_k, T_k)}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1(x, T) \\ f_2(x, T) \end{pmatrix}_{(x_k, T_k)}$$



ukupne bilance mase

konačni udio suhe tvari

bilance mase suhe tvari

$$1) \quad \underline{q_{S0}} + \underline{\xi \cdot q_{L3}} + \underline{q_P} = \underline{q_{L1}} + \underline{q_{V1}} + \underline{q_P}$$

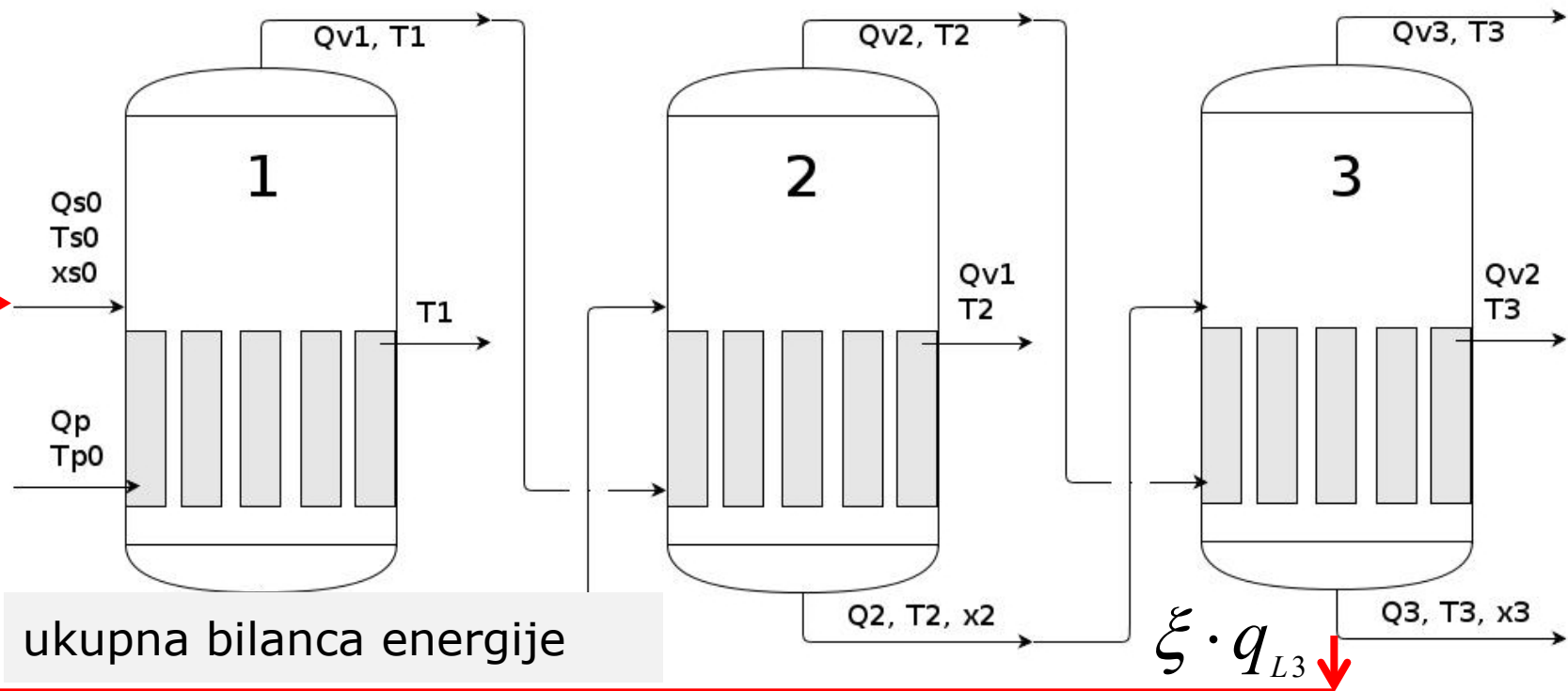
$$2) \quad q_{L1} + q_{V1} = q_{L2} + q_{V2} + q_{V1}$$

$$3) \quad q_{L2} + q_{V2} = q_{L3} + q_{V3} + q_{V2}$$

$$1) \quad q_{S0} \cdot x_{S0} + \xi \cdot q_{L3} = q_{L1} \cdot x_1$$

$$2) \quad q_{L1} \cdot x_1 = q_{L2} \cdot x_2$$

$$3) \quad q_{L2} \cdot x_2 = q_{L3} \cdot x_3$$



$$1) \quad M \cdot c_p \cdot T + \xi \cdot q_{L3} \cdot c_P(x_3) \cdot T_3 + M \cdot i_p \cdot T$$

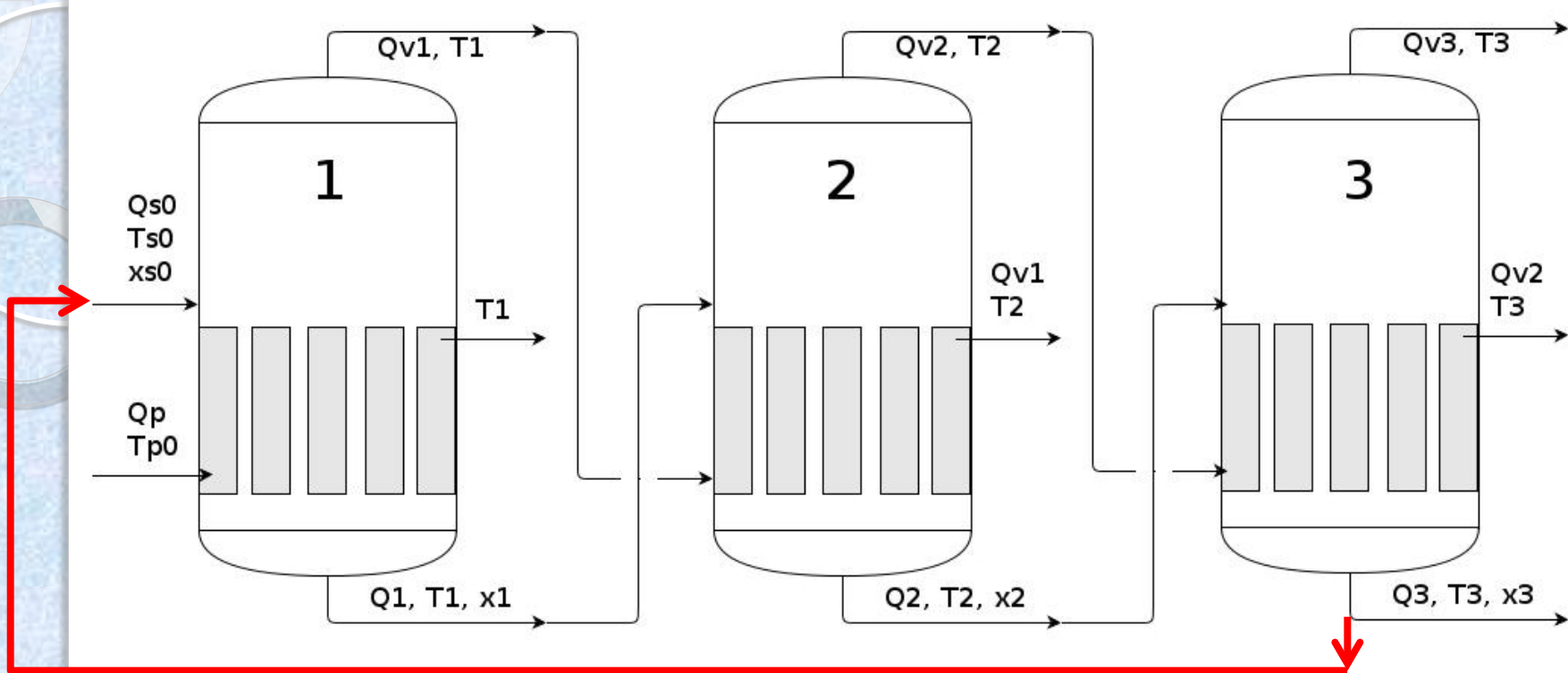
$$q_{L1} \cdot c_P(x_1) \cdot T_1 + q_{V1} \cdot i_P(T_1) + q_P \cdot i_V(T_1)$$

$$2) \quad q_{L1} \cdot c_P(x_1) \cdot T_1 + q_{V1} \cdot i_P(T_1) =$$

$$q_{L2} \cdot c_P(x_2) \cdot T_2 + q_{V2} \cdot i_P(T_2) + q_{V1} \cdot i_V(T_2)$$

$$3) \quad q_{L2} \cdot c_P(x_2) \cdot T_2 + q_{V2} \cdot i_P(T_2) =$$

$$q_{L3} \cdot c_P(x_3) \cdot T_3 + q_{V3} \cdot i_P(T_3) + q_{V2} \cdot i_V(T_3)$$



bilance energije pare

$$1) \quad q_P \cdot [i_P(T_{P0}) - i_V(T_1)] = S \cdot h(x_1) \cdot (T_{P0} - T_1)$$

$$2) \quad q_{V1} \cdot [i_P(T_1) - i_V(T_2)] = S \cdot h(x_2) \cdot (T_1 - T_2)$$

$$3) \quad q_{V2} \cdot [i_P(T_2) - i_V(T_3)] = S \cdot h(x_3) \cdot (T_2 - T_3)$$

Korišteni su slijedeći linearni regresijski modeli za

- koeficijent prijenosa topline: $h(x) = h_0 - h_1 \cdot x$

- specifičnu toplinu: $cp(x) = cp_s \cdot x + cp_l \cdot (1 - x)$

$$cp_s = cp_{(solid)} = cp_{(suhe\ tvari\ u\ soku)}$$

$$cp_l = cp_{(liquid)} = cp_{(vode\ u\ soku)}$$

- entalpije zasićene pare: $i_p(x) = i_{p0} + i_{p1} \cdot T$

- entalpije otparene vode: $i_v(T) = i_{v0} + i_{v1} \cdot T$

Svrha modeliranja procesa uparavanja

1) optimiranje djelotvornosti uparavanja

$$\max (E)$$

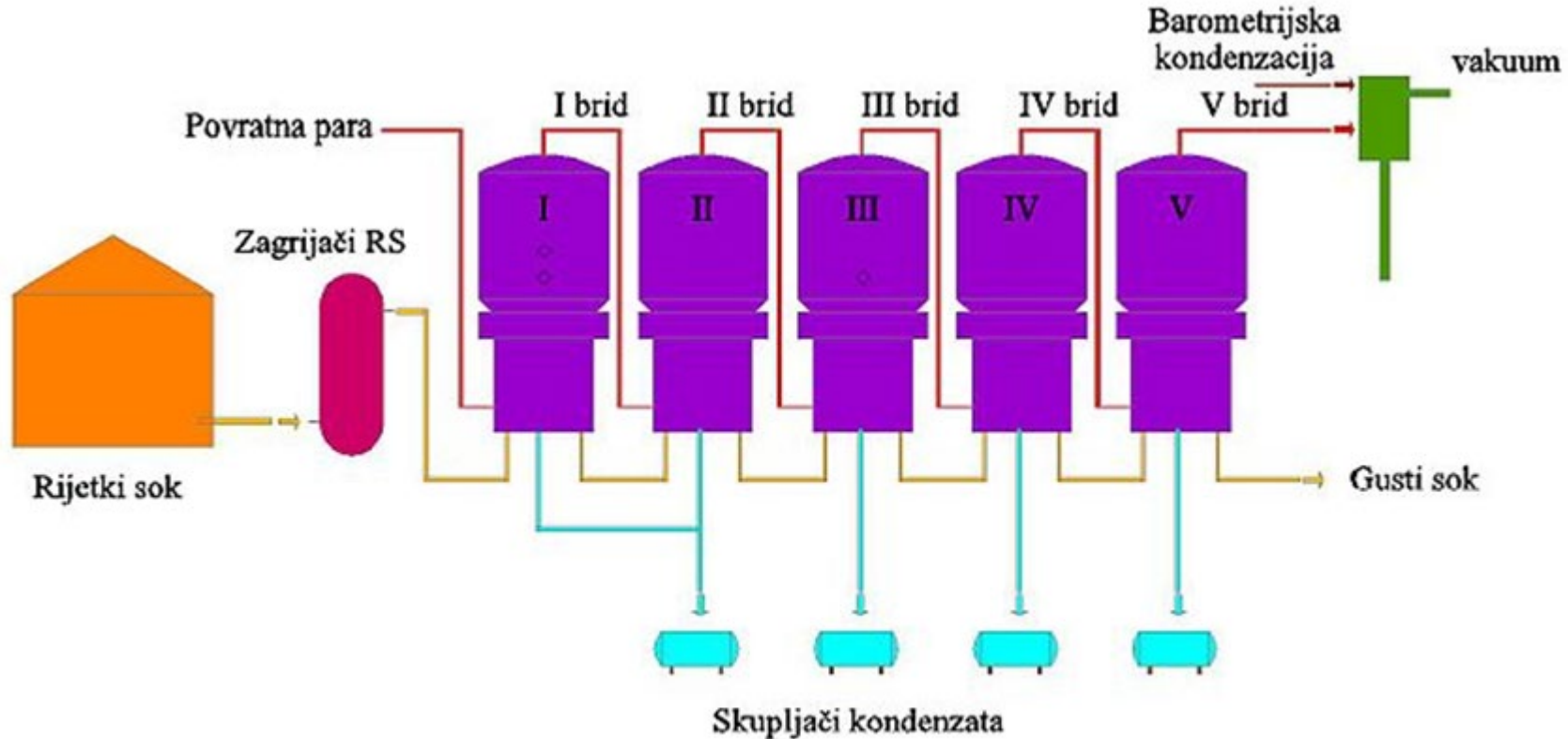
2) optimiranje kakvoće proizvoda

(npr. indeks kakvoće = koncentracija vitamina u koncentratu)

3) adaptivno upravljanje

za promjenljivi sastav ulazne sirovine (x_0)

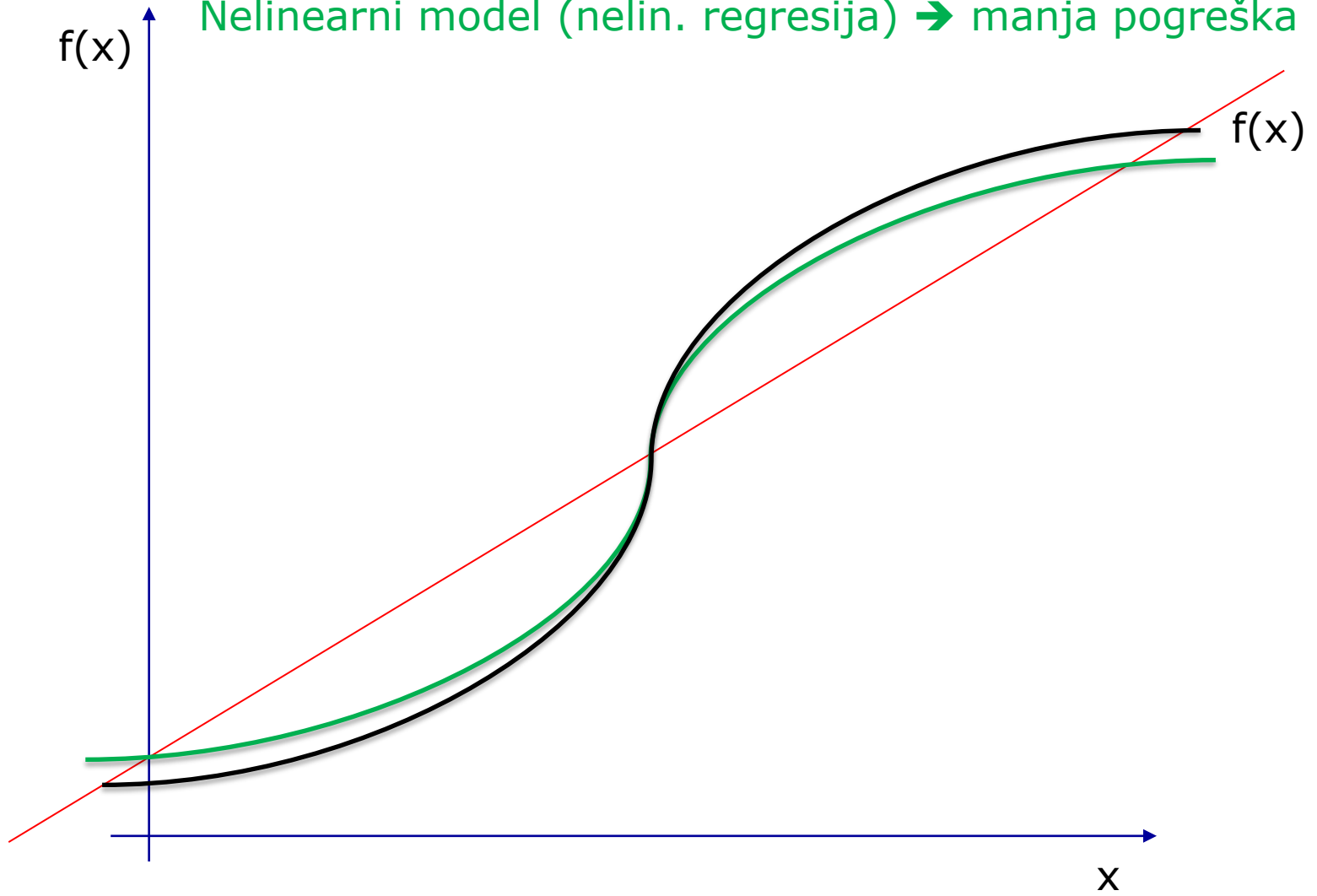
Uparavanje rijetkog soka u proizvodnji šećera

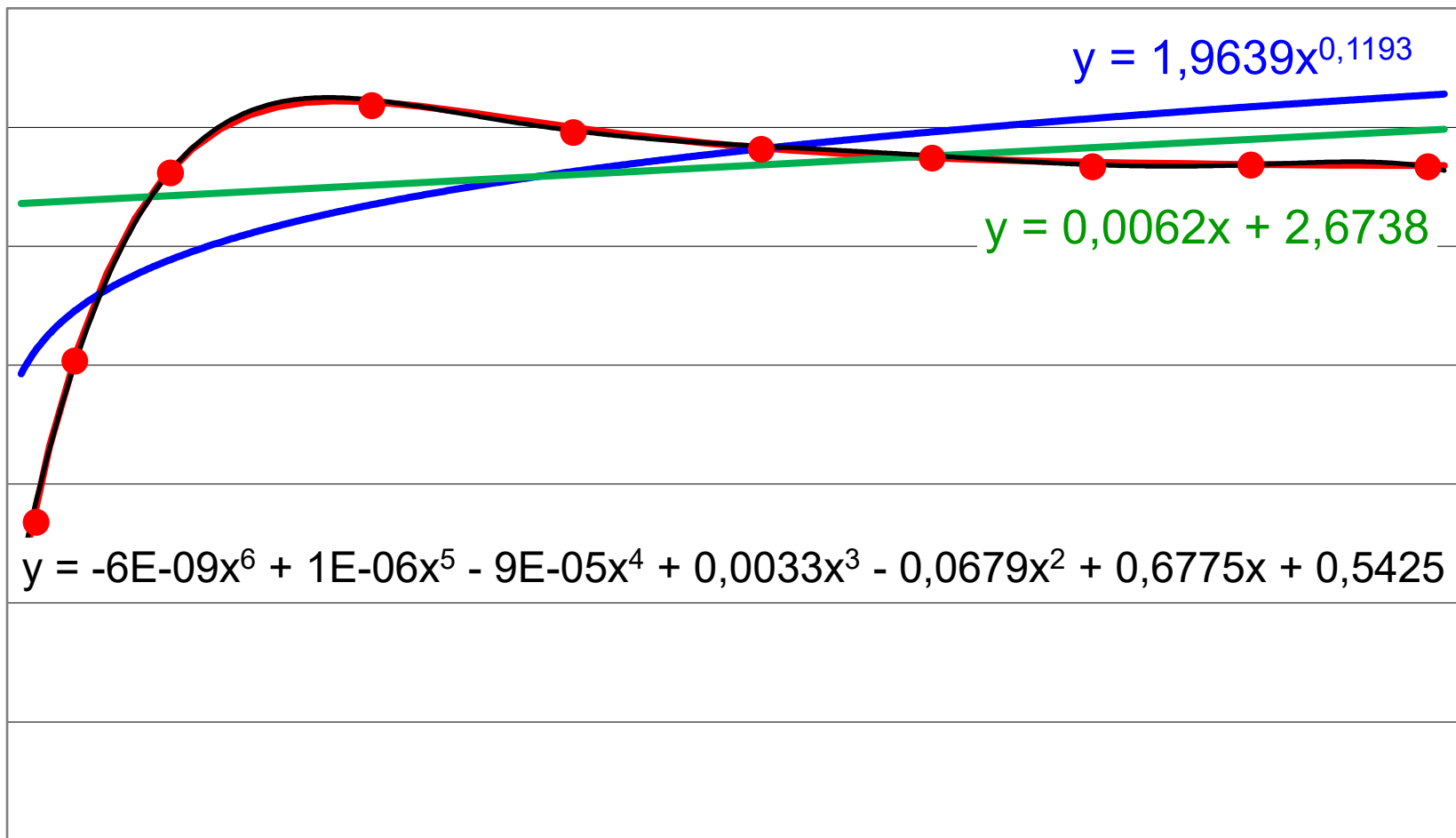


PETEROČLANA UPARNA STANICA

Linearni model (lin. Regresija) → velika pogreška

Nelinearni model (nelin. regresija) → manja pogreška





- Krivulja zadane funkcije
- Eksponencijalna regresija
- Linearna regresija
- Polinomna regresija 6. stupnja



3. Modeli dinamičkih stanja sustava

Model smrzavanja namirnica

Metoda za rješavanje diferencijalnih jednažbi
(Eulerova i Runge-Kutta)

Model sterilizacije namirnica

Model upravljanja biokemijskim reaktorom

- Promjene mjernih veličina u tehnološkim procesima najčešće su opisane diferencijalnim jednačbama:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \frac{dy}{dr} = f(r, y)$$

- Većina tehnoloških procesa određena je istovremenim promjenama više nezavisnih veličina
(primjer: promjenom temperature namirnice mijenjaju se i viskozitet, gustoća, volumen, udio vitamina i dr.)
- Zato ove promjene ne možemo opisati običnim diferencijalnim jednačbama (ODJ) nego ih moramo opisivati parcijalnim diferencijalnim jednačbama (PDJ) [u istom trenutku mijenjaju se vrijednosti nekoliko veličina]

- Nije nam uvijek potrebno potpuno točno rješenje neke funkcije
- Stoga parcijalne diferencijalne jednačbe (PDJ) pojednostavljujemo različitim **aproksimacijama** zadane funkcije
- Tako PDJ postaju obične diferencijalne jednačbe (ODJ), a ponekad i obične algebarske jednačbe (OAJ)

PDJ → ODJ → OAJ

- **Aproksimacijama** ne možemo izračunati potpuno točne vrijednosti rješenja funkcije nego tek **približne vrijednosti**
- Za izračun točnih ili približnih vrijednosti funkcije najčešće moramo koristiti **numeričke metode**
- Izbor numeričke metode zavisi od vrste jednačbe kojom su opisane bilance ili druge zavisnosti izlaznih veličina o ulaznim veličinama

- Obične i parcijalne diferencijalne jednačbe (ODJ i PDJ) koje se pojavljuju u tehnološkim procesima često nisu rješive analitički tj. egzaktno (izračunata rješenja ne možemo potvrditi mjerenjem)
- Zato je za izračunavanje rješenja potrebno koristiti numeričke metode
(Primjer: za izračunavanje temperature namirnice tijekom sterilizacije, potrebno je riješiti diferencijalnu jednačbu)
- Najpoznatija je Eulerova metoda *(Leonhard Euler, 1768.)*
- Euler-ova metoda je tzv. Runge–Kutta metoda prvog reda (pogreška metode je reda e^1 pa je to metoda prvog reda)
 - *Vidi skripta: Numeričke metode*

- Postoje i drugi oblici ove metode kao i njena poboljšanja (npr.: korigirana Eulerova metoda)
- Ideja Euler-ove metode je da se „visina“ iduće ordinate iz prethodne konstruira po tangenti u toj prethodnoj točki ($x =$ sjecište tangente i ordinatne osi)

- eksplicitni oblik jednadžbe za primjenu Euler-ove metode je matematički izraz:

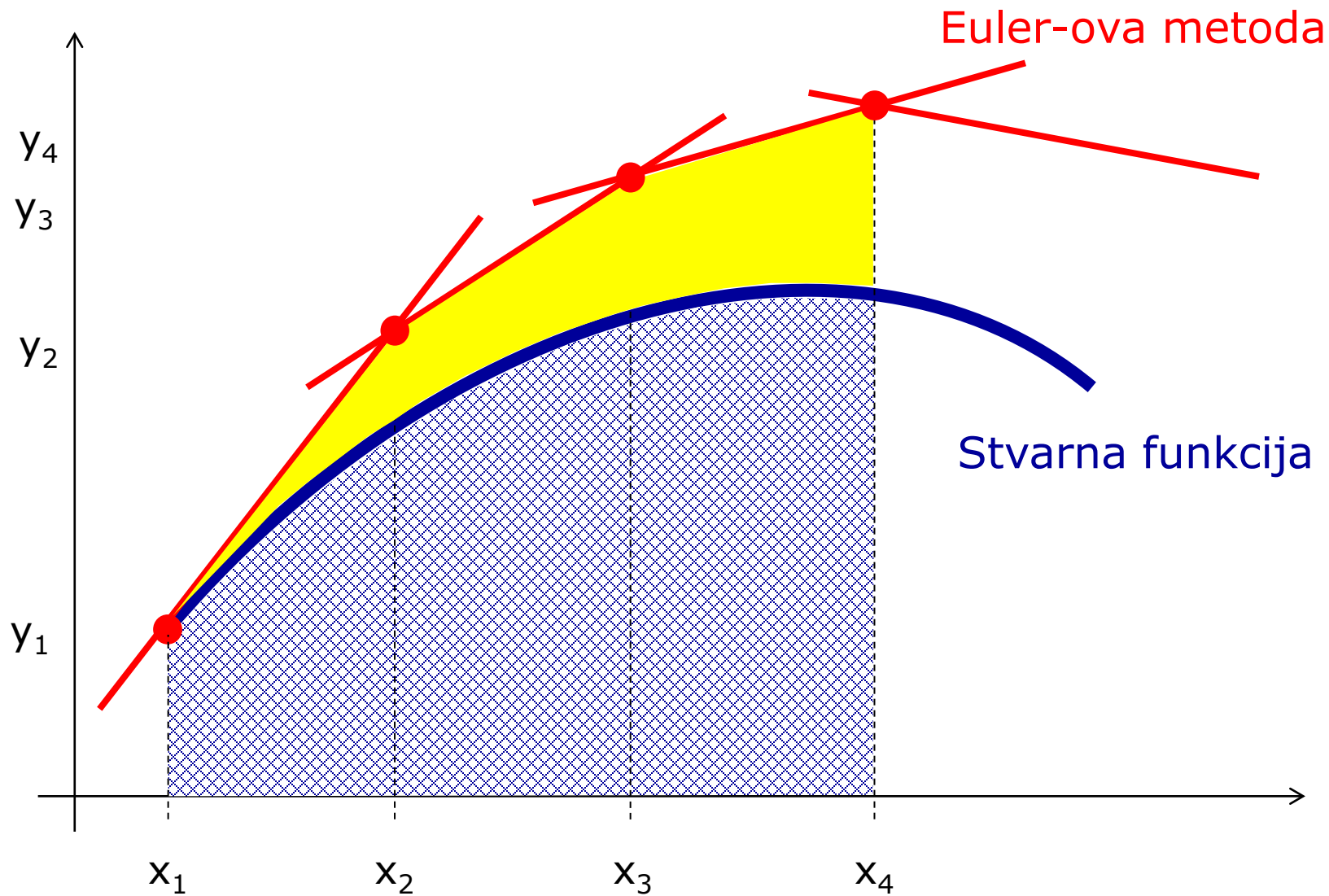
$$y_{(k+1)} = y_{(k)} + h \cdot f(y_{(k)}, t_{(k)})$$

y = vrijednost funkcije

k = korak **iteracije** (iteracija je ponavljanje izračuna)

h = korak **integracije** (integriranje je izračunavanje površine ispod krivulje)

t = vrijeme za koje se izračunava vrijednost funkcije

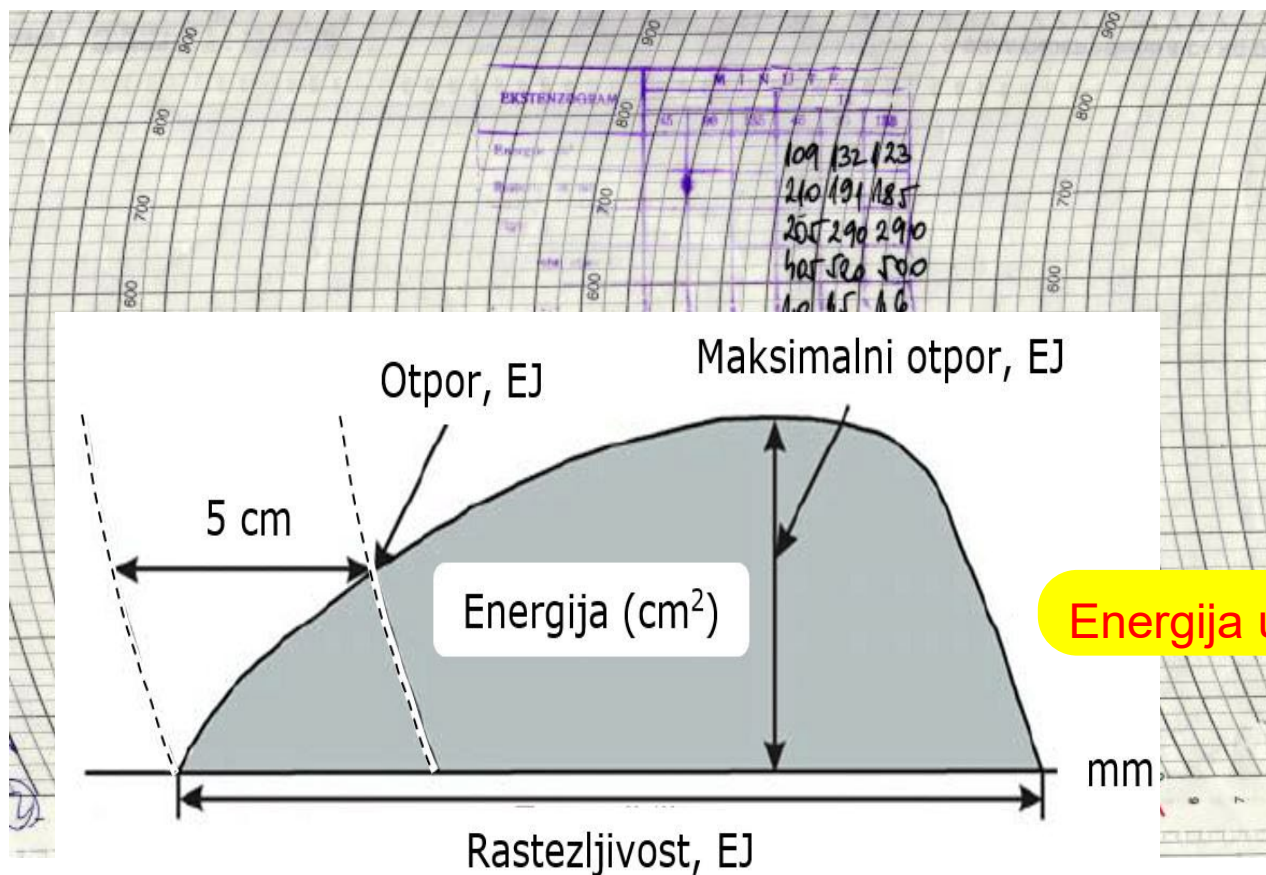


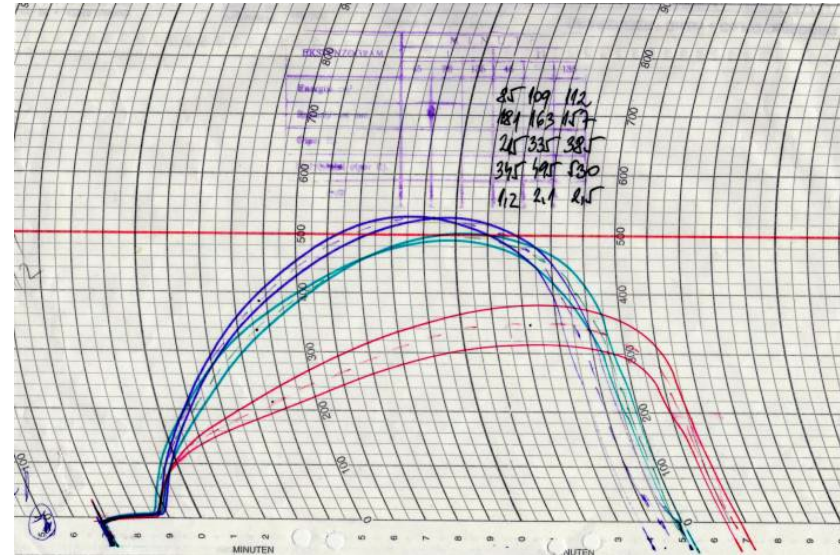
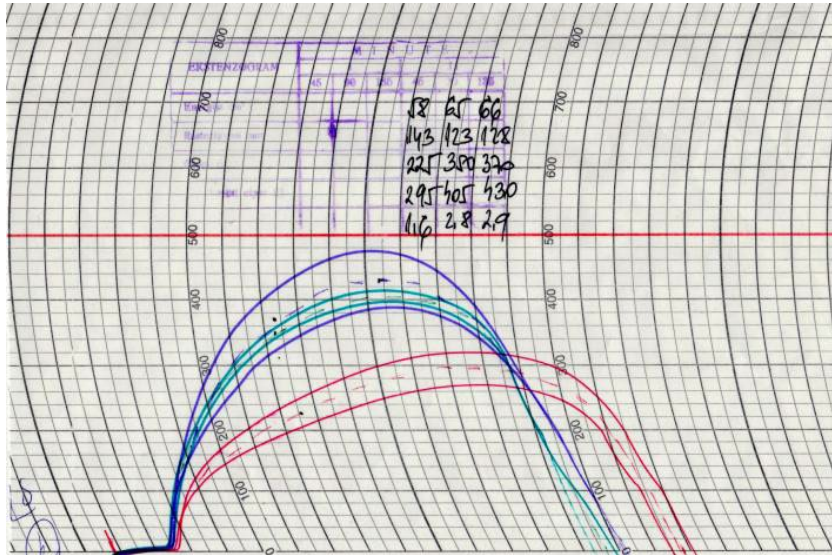
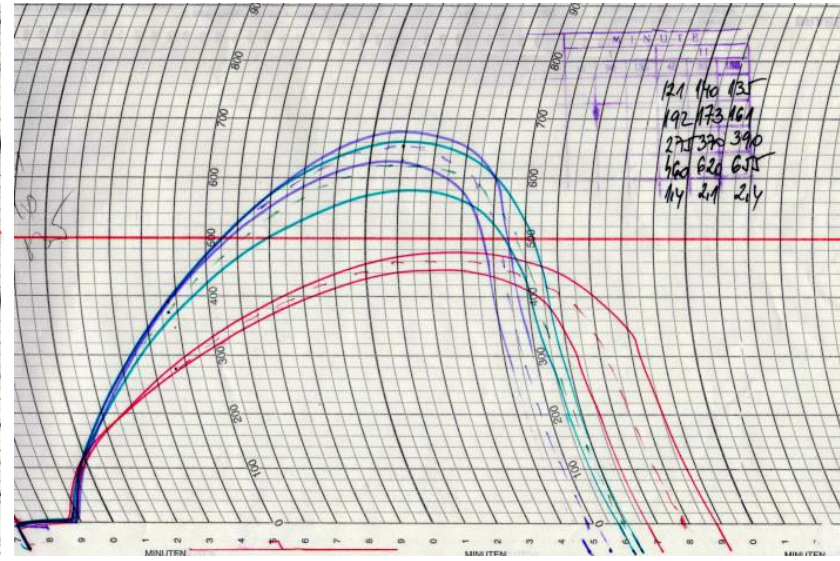
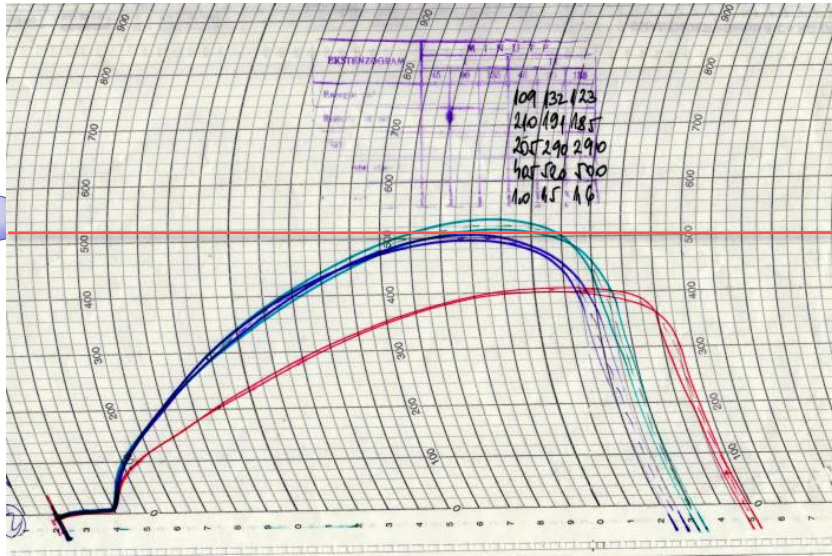
Rješenja izračunata primjenom numeričkih metoda samo su aproksimacije stvarnih rješenja.

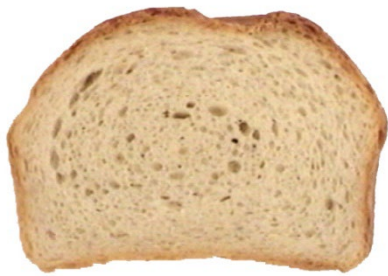
Primjer iz tehnologije proizvodnje i prerade brašna:

Ekstenzograf je uređaj koji bilježi krivulju koja nastaje mjerenjem otpora i duljine tijesta pri rastezanju, sve do trenutka kidanja.

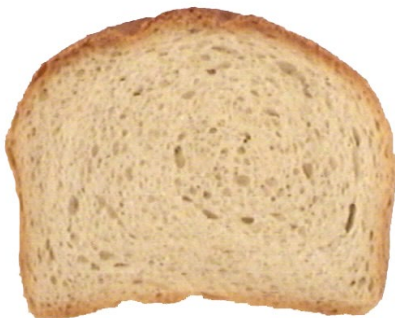
Rezultat je prikazan na ekstenzogramu:



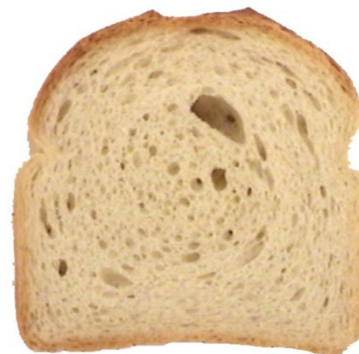




Ana



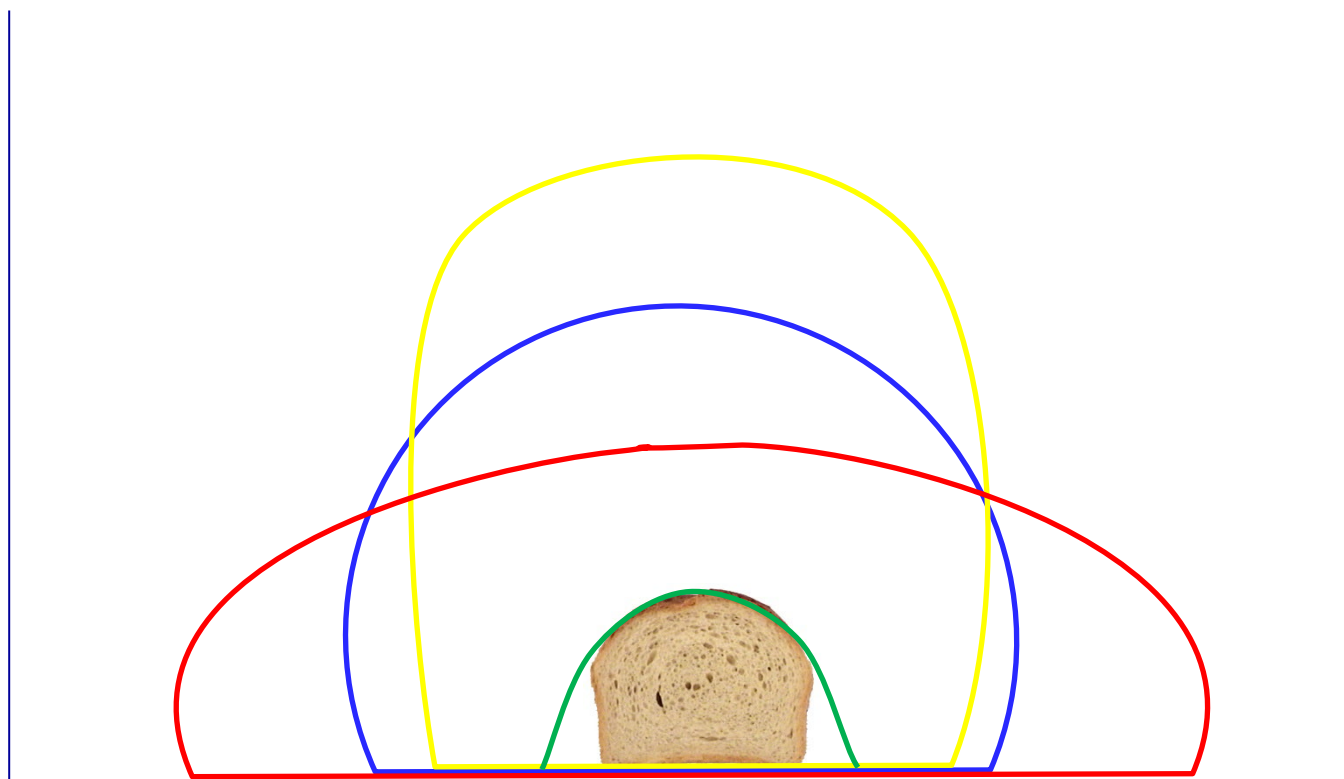
Srpanjka



Divana

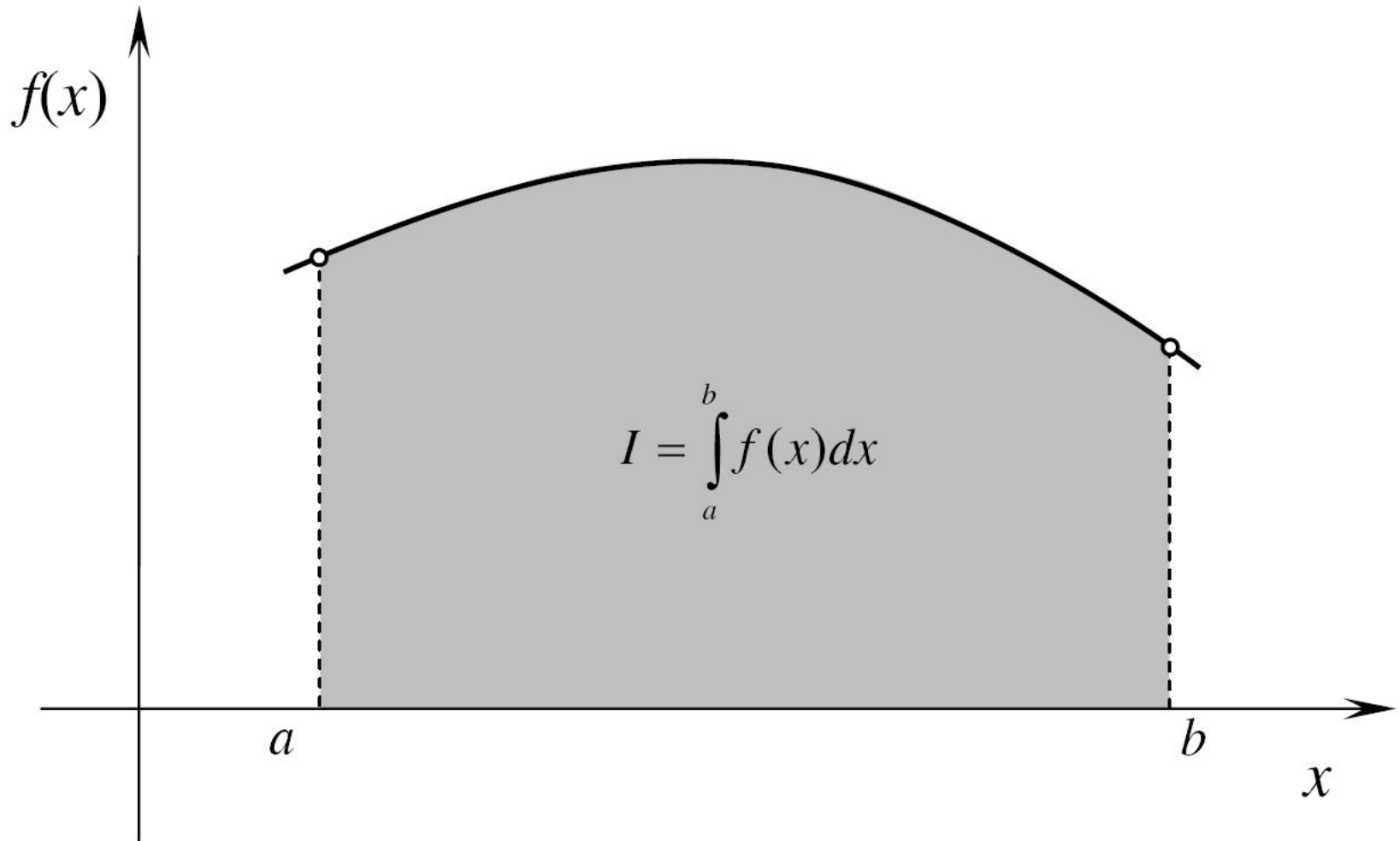


Bezostaja



Soissons

- Presjek vekne kruha prikazana je krivuljom.
- Površina ispod krivulje neke funkcije je **integral funkcije**.
- Za izračunati površinu presjeka potrebno je izračunati



PRIMJER:

- zadana je diferencijalna jednačba: $\frac{dy}{dt} = 0.2 \cdot (t - y)$

- opći oblik iterativne formule kod Euler-ove metode je

najjednostavnija aproksimacija krivulje

(dobivena je upotrebom samo prvog člana Taylor-ovog reda)

$$Y_{(k+1)} = Y_{(k)} + h \cdot f(t_{(k)}, Y_{(k)})$$

- gdje je:

indeks k = korak iteracije ($k = 1, 2, 3, \dots$)

konstanta h = korak integracije ($h = 0.5$)

Za zadanu jednačbu iterativna formula je:

$$Y_{(k+1)} = Y_{(k)} + h \cdot 0.2 (t_{(k)} - Y_{(k)})$$

integracija \neq iteracija

- neka je korak integracije $h = 0.5$, $t_0 = 0$ i $y_0 = 0$
- vrijednost varijable t se povećava (npr. vrijeme u sekundama) u svakoj sljedećoj iteraciji za zadani korak integracije h ($h = 0.5$ sekundi)
- korak integracije h je konstantan i za svako izračunavanje ima vrijednost $h = 0.5$

$$Y_{(k+1)} = y_{(k)} + h \cdot f(t_{(k)}, y_{(k)})$$

$$\frac{dy}{dt} = 0.2 \cdot (t - y)$$

$$Y_{k+1} = y_k + h \cdot 0.2 (t_k - y_k)$$

- neka je korak integracije $h = 0.5$, $t_0 = 0$ i $y_0 = 0$

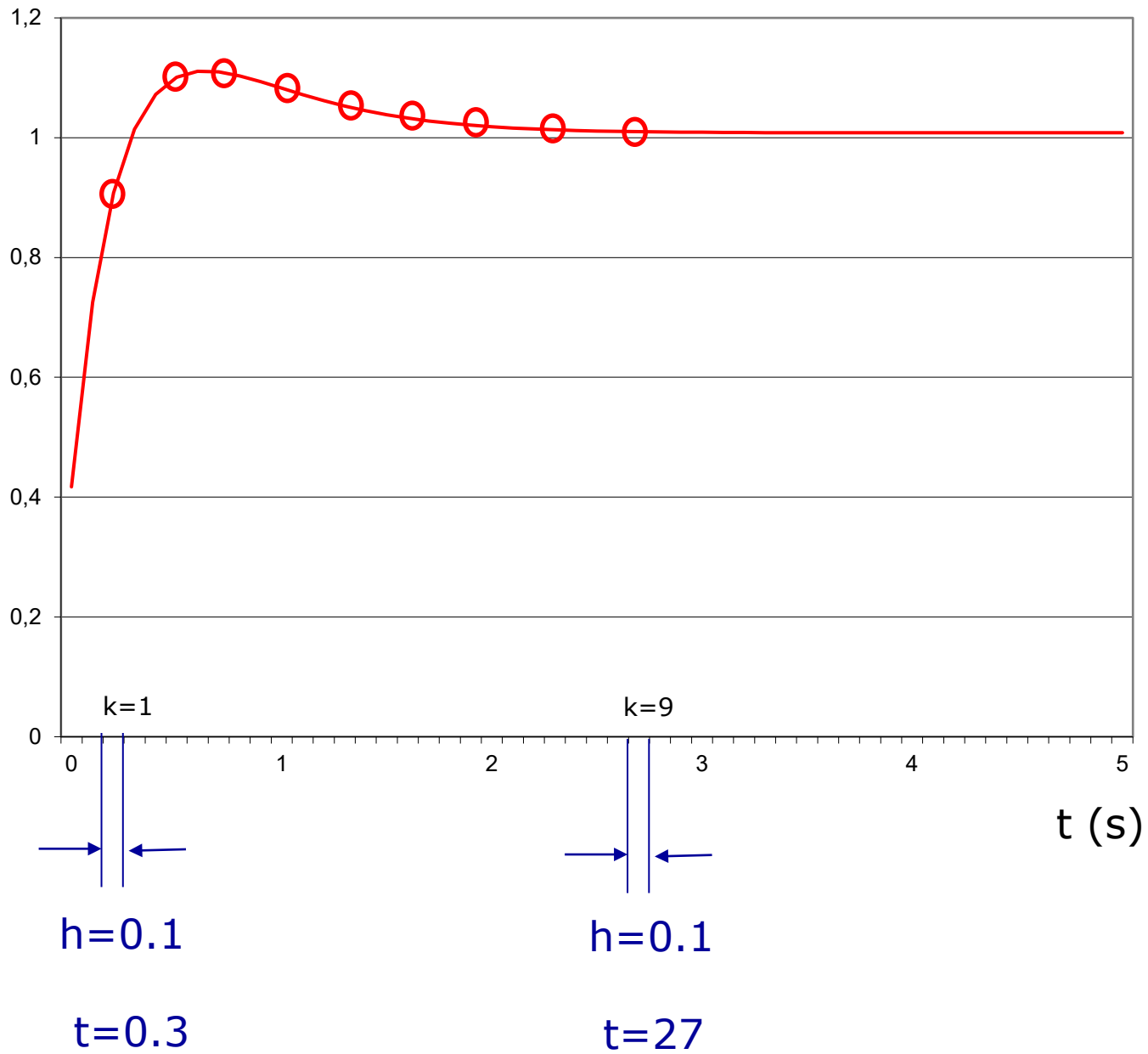
$$y_1 = y_0 + h \cdot 0.2 (t_0 - y_0) = 0 + 0.5 \cdot 0.2 (0 - 0) = 0$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot 0.2 (t_1 - y_1) = 0 + 0.5 \cdot 0.2 (0.5 - 0) = 0.05$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot 0.2 (t_2 - y_2) = 0.05 + 0.5 \cdot 0.2 (1 - 0.05) = 0.145$$

...

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot 0.2 (t_k - y_k)$$



Iterativnim izračunavanjem dobiveni su sljedeći rezultati kao parovi točaka (x_k, y_k) kojima prolazi integralna krivulja koja predstavlja grafički prikaz integrirane funkcije $f(x) = dy/dt$:

k	$t_{(k)}$	$Y_{(k)}$
0	0	0
1	0.5	0
2	1	0.05
3	1.5	0.145
4	2	0.2805
5	2.5	0.45245
...

Euler-ova metoda aproksimira krivulju pravcem (tangentom) u svakoj iteraciji.

Korigirana Euler-ova metoda

Korekcija Euler-ove metode izvodi se tako da se u polovištu između $t_{(k)}$ i $t_{(k+1)}$ povuče tangenta na krivulju, pa pogreška u $y_{(k+1)}$ postaje manja nego kod obične Euler-ove metode.

Opći oblik iterativne formule je:

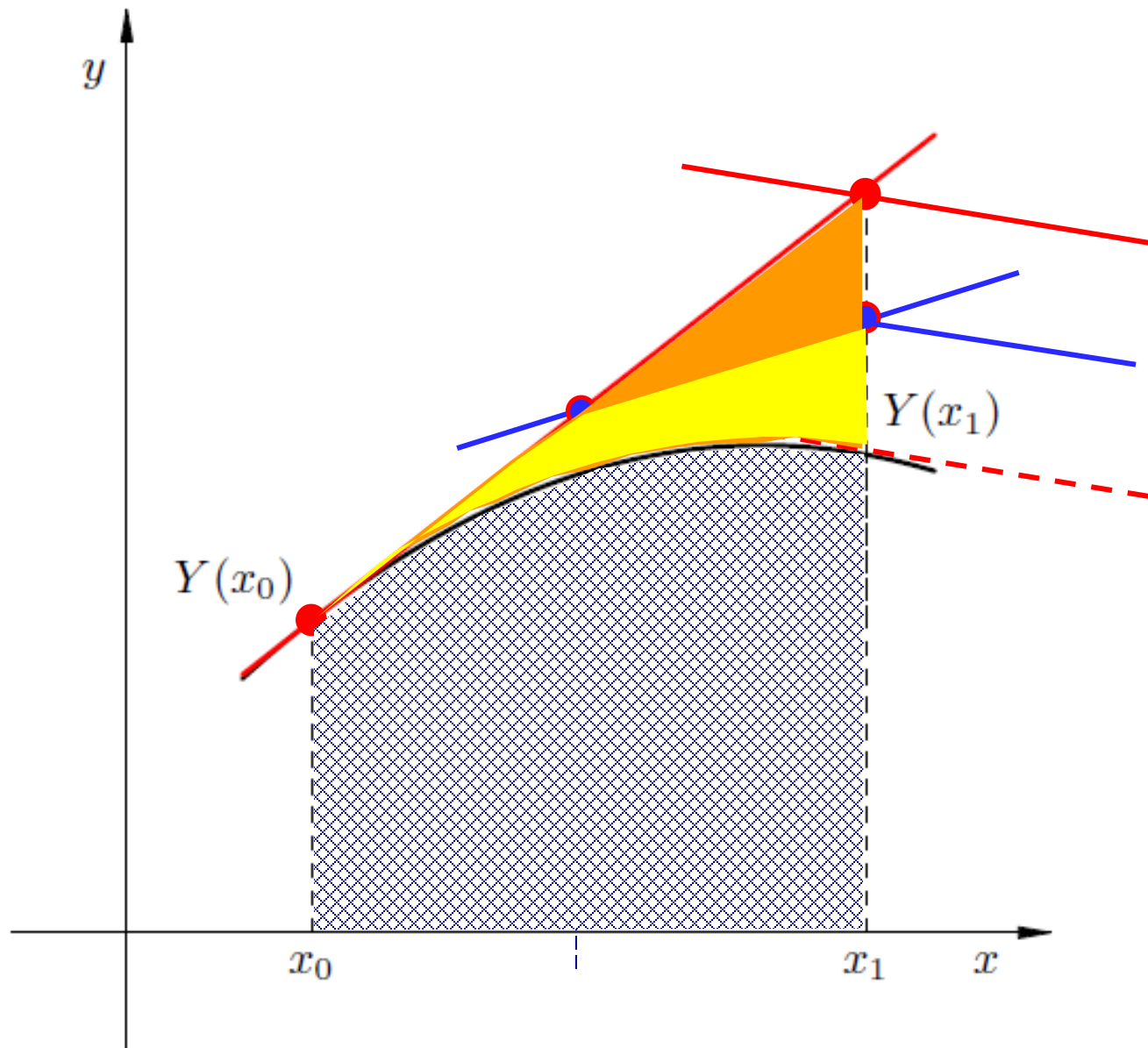
$$y_{k+1} = y_k + h \cdot \frac{1}{2} \left[f(y_k, t_k) + f\left(y_k + h \cdot f(y_k, t_k), t_{k+1}\right) \right]$$

Za zadanu diferencijalnu jednažbu iterativna formula je:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{1}{5}(t_k - y_k) + \frac{1}{5} \left(t_{k+1} - h \cdot \frac{1}{5}(t_k - y_k) \right) \right]$$

Iterativnim izračunavanjem dobiveni su sljedeći rezultati kao parovi točaka (x_k, y_k) kojima prolazi integralna krivulja koja predstavlja grafički prikaz integrirane funkcije $f(x) = dy/dt$:

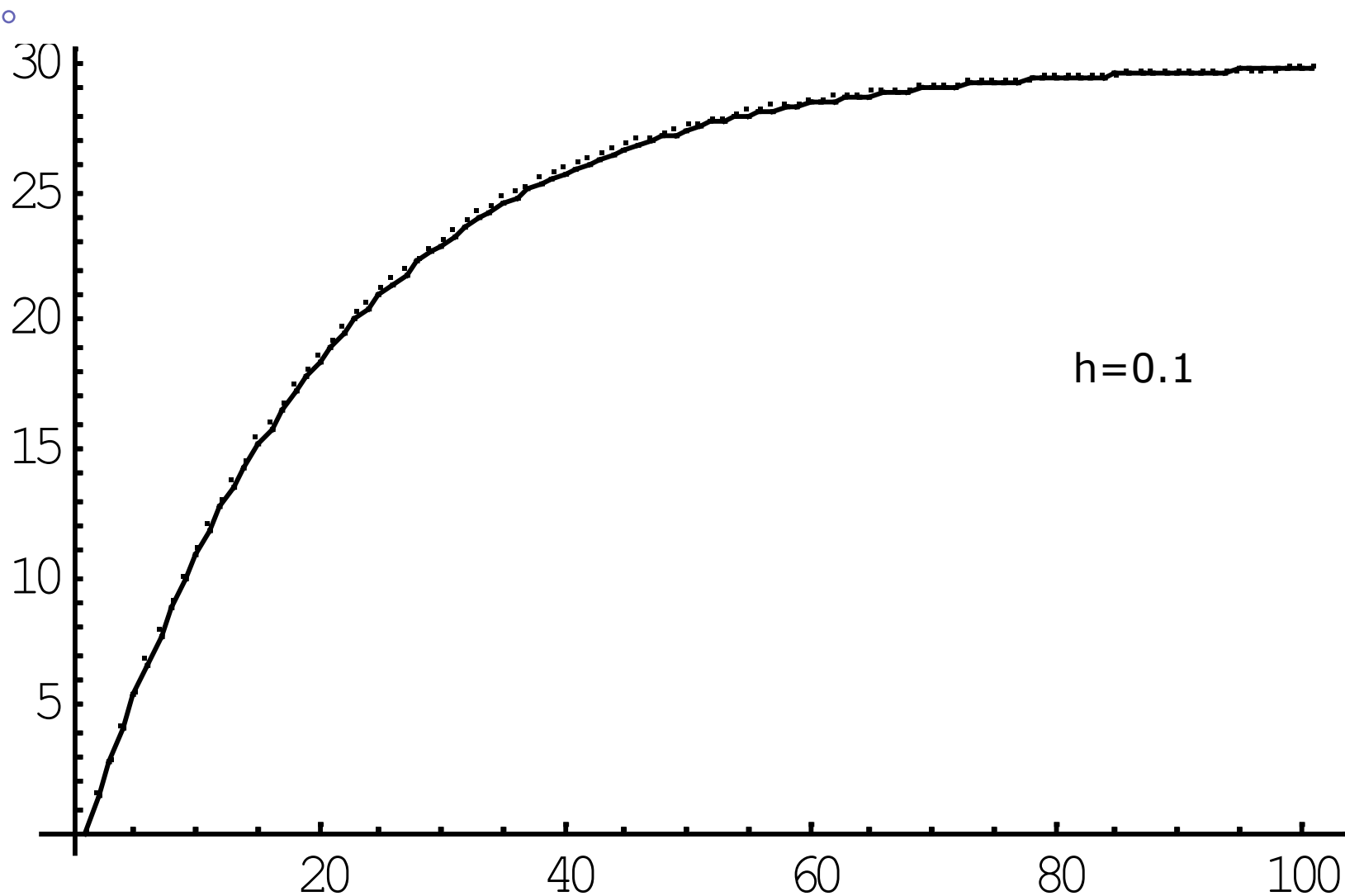
k	$t_{(k)}$	$Y_{(k)}$
0	0	0
1	0.5	0.025
2	1	0.0964
3	1.5	0.2120
4	2	0.3670
5	2.5	0.5683
6	3	0.8053
7	3.5	1.0790
...



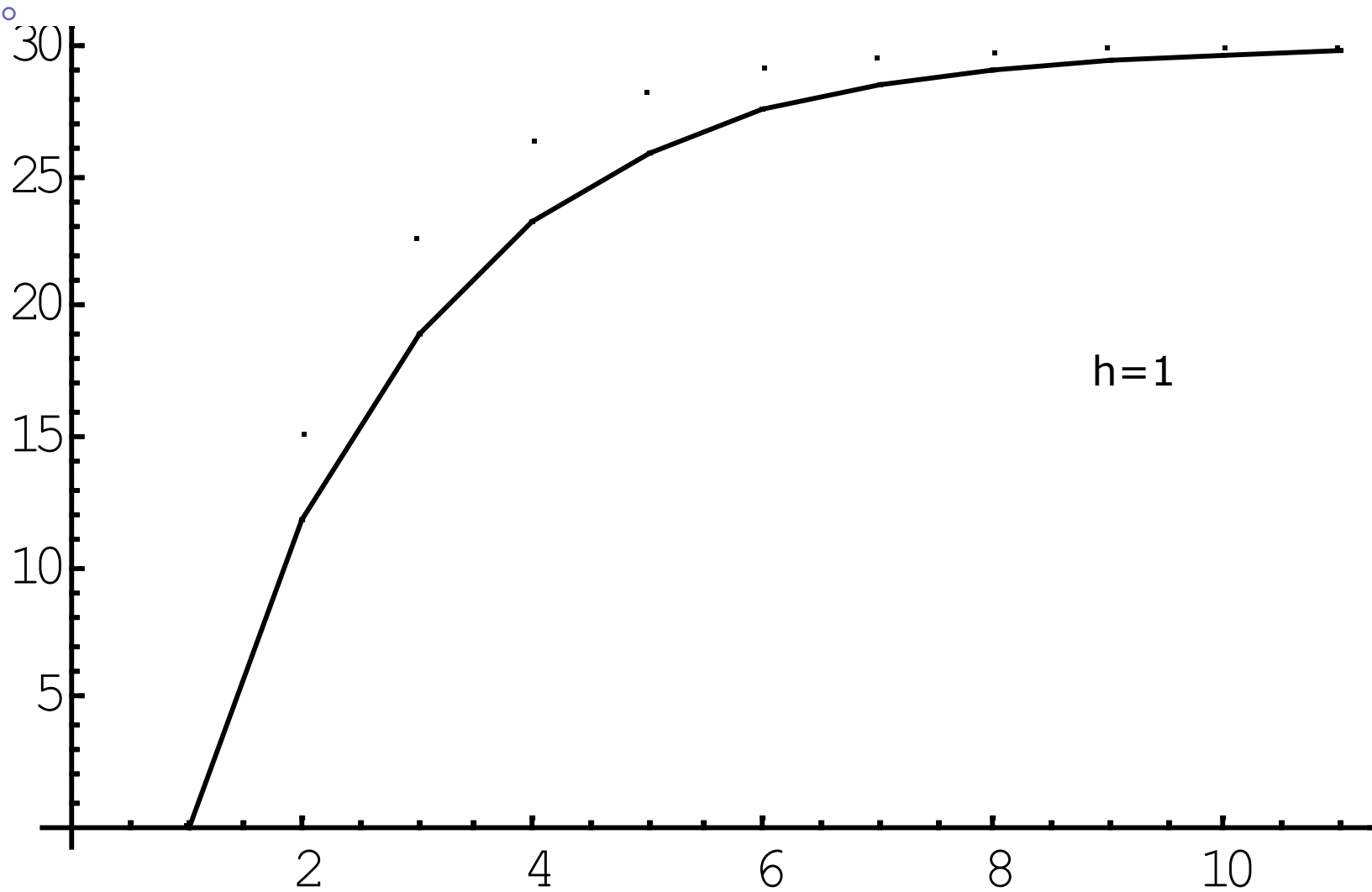
— Euler-ova metoda

— Korigirana E. metoda

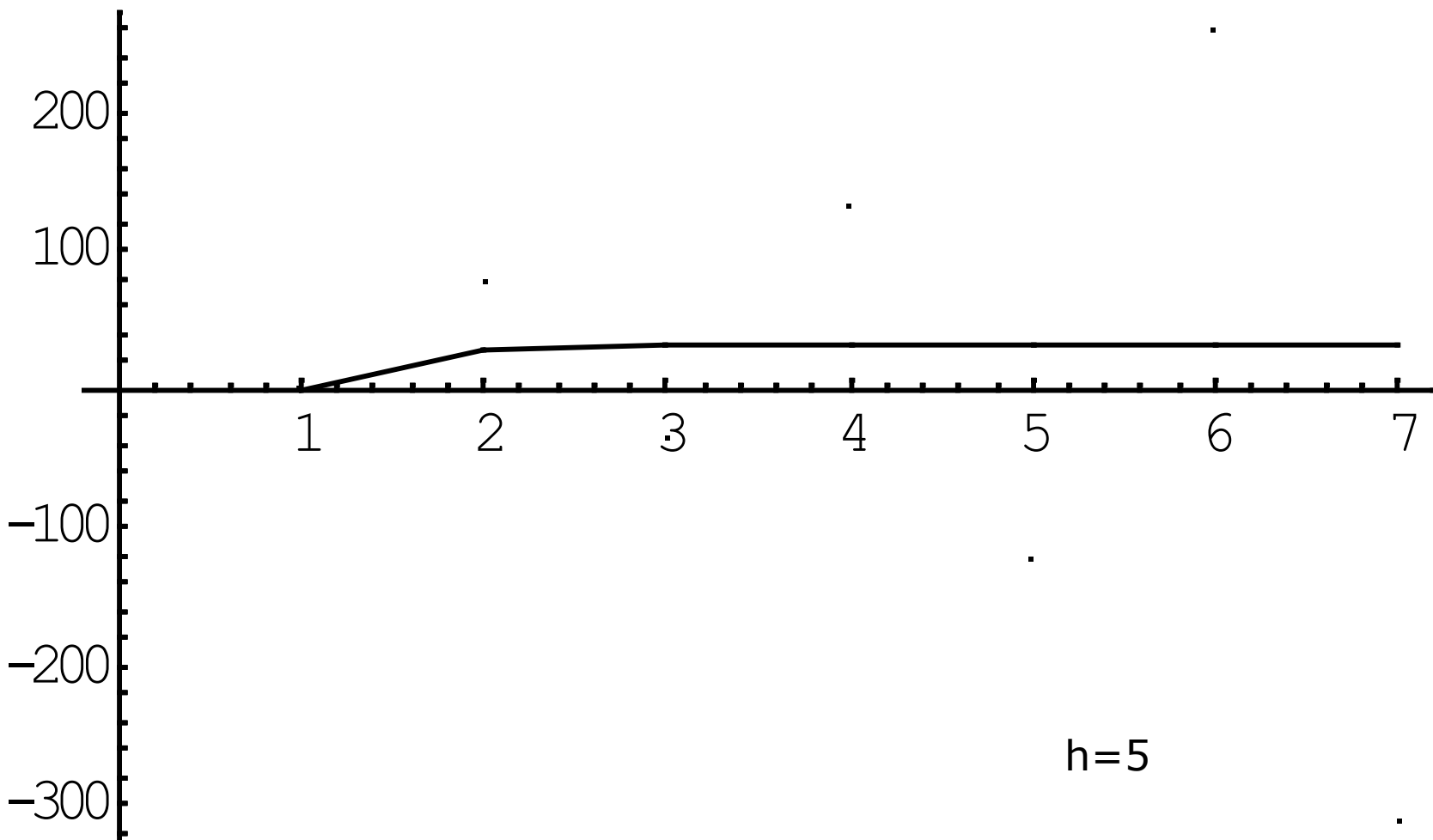
- Za mali korak integracije ($h=0.1$) metoda preciznije aproksimira funkciju



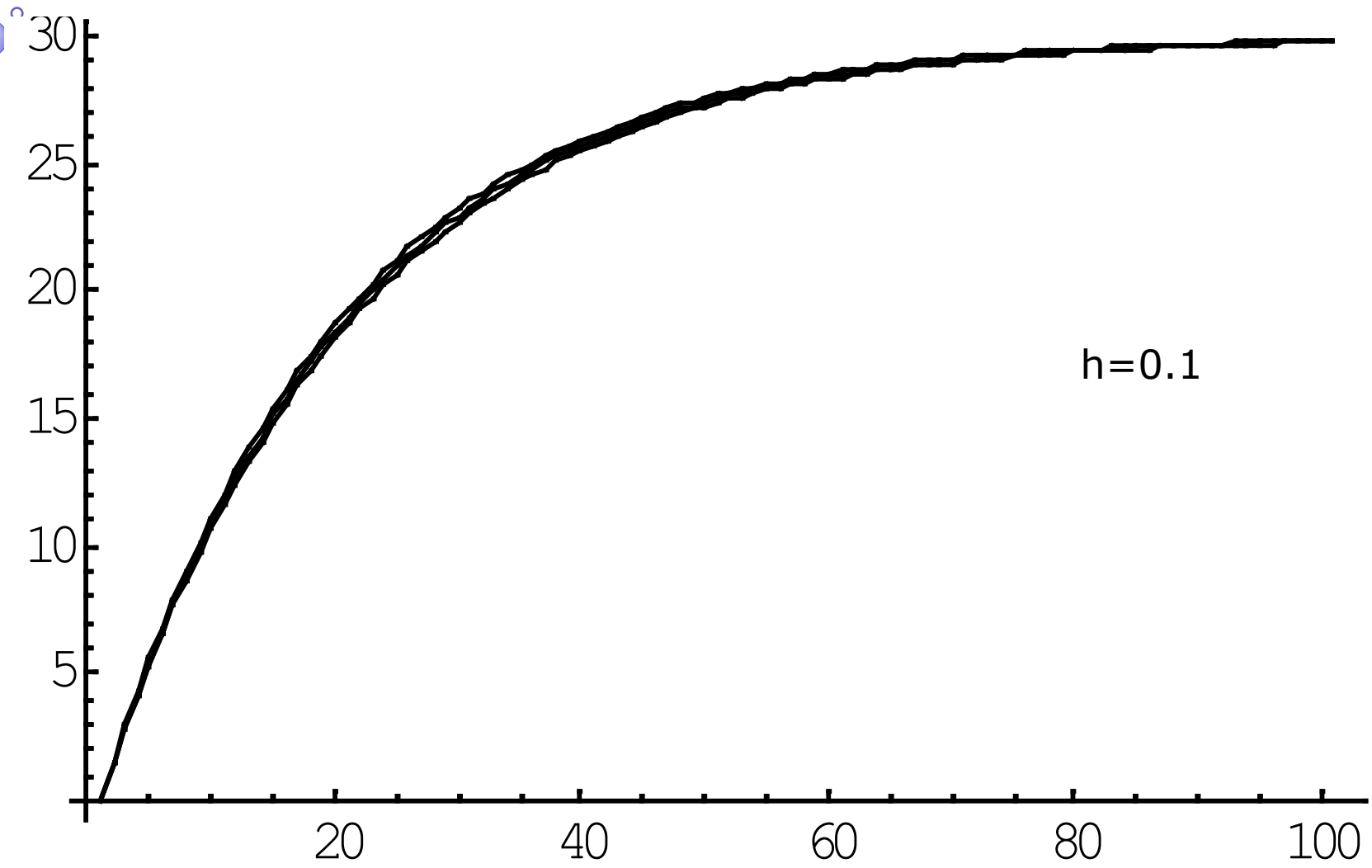
- Za veliki korak integracije ($h=1$) metoda manje precizno aproksimira funkciju

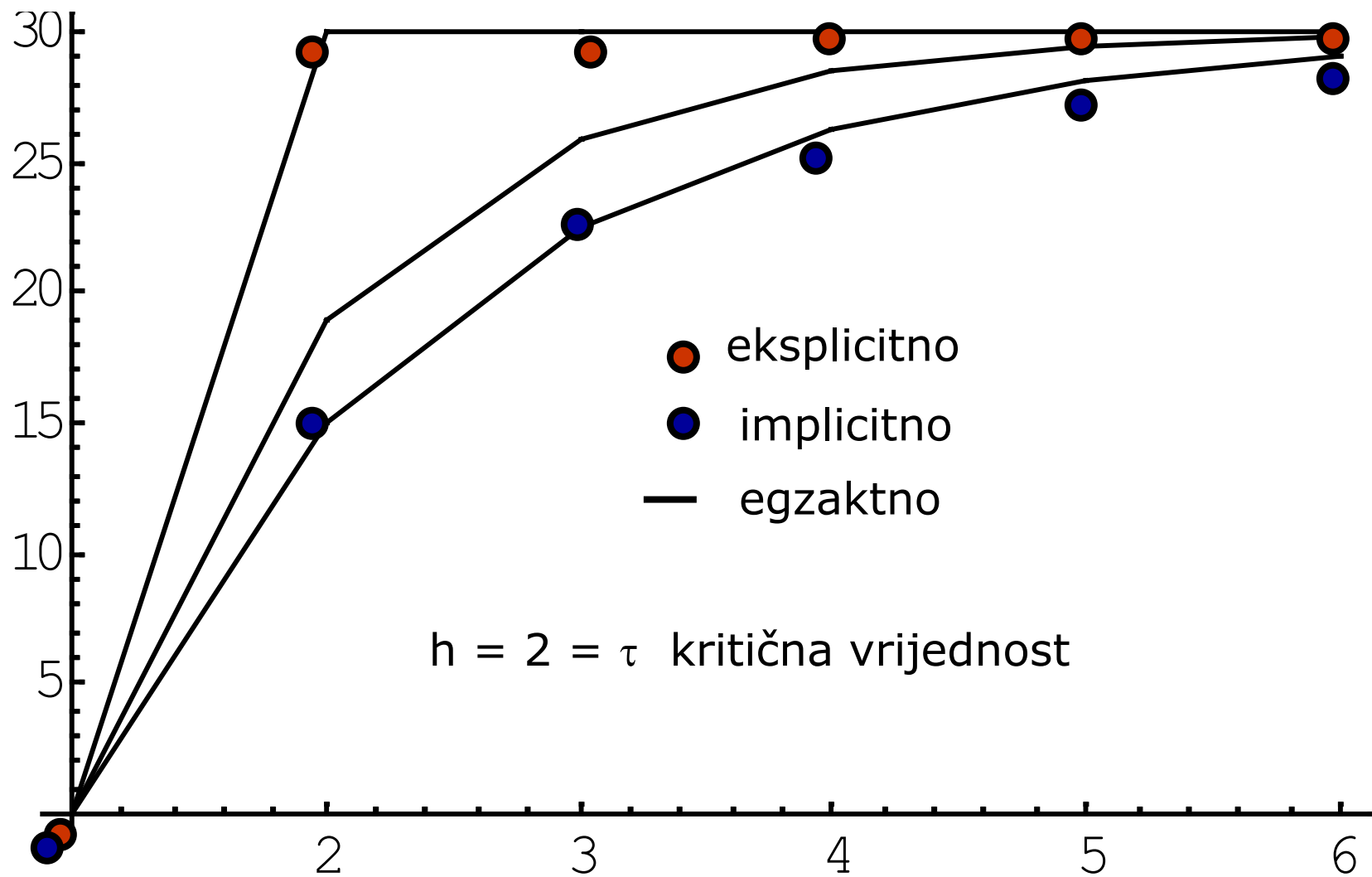



- Za jako veliki korak integracije ($h=5$) metoda ne može precizno aproksimirati funkciju, a niz izračunatih rješenja je divergentan



Usporedba eksplicitne i implicitne Eulerove metode





- 
- bolje metode od Euler-ove imaju više koraka o kojima ovisi iduća aproksimacija
 - najpoznatije su Runge-Kutta metode, osobito Runge-Kutta metoda četvrtog reda

Metoda integracije: Runge Kutta 2 - jednađbe

Zadan je sustav jednađbi

$$\frac{d}{dt} \vec{y}(t) = \vec{f}(\vec{y}, t)$$

Prvi korak (prva tangenta)

$$\vec{k}_1 = h \cdot \vec{f}(\vec{y}_i, t_i)$$

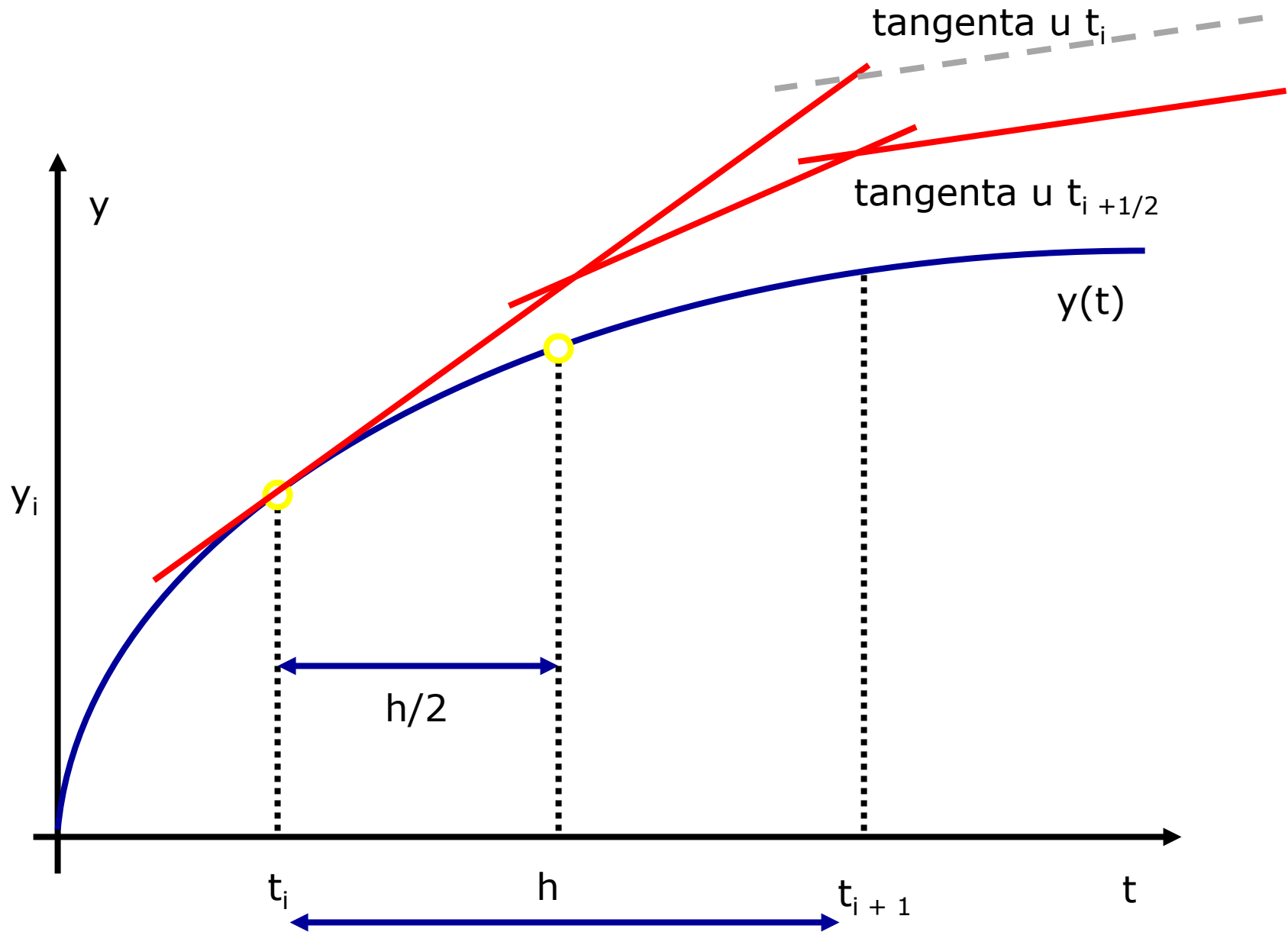
Drugi korak (druga tangenta)

$$\vec{k}_2 = h \cdot \vec{f}\left(\vec{y}_i + \frac{1}{2} \cdot \vec{k}_1\right)$$

Konačni izraz

$$\vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i + \vec{k}_2$$

Metoda integracije: Runge Kutta 2





Što zapravo predstavlja ova plava krivulja u primjerima?

Predstavlja grafički prikaz promjene neke mjerne veličine (veličine stanja).

To može biti promjena temperature materijala, udjela suhe tvari u materijalu, viskoziteta itd.

Metoda integracije: Runge Kutta 4

Postupak se provodi u 4 koraka:

1) tangenta na lijevom rubu

$$\vec{k}_1 = h \cdot \vec{f}(\vec{y}_i, t_i)$$

2) tangenta u polovištu

$$\vec{k}_2 = h \cdot \vec{f}\left(\vec{y}_i + \frac{1}{2} \cdot \vec{k}_1\right)$$

3) tangenta u polovištu

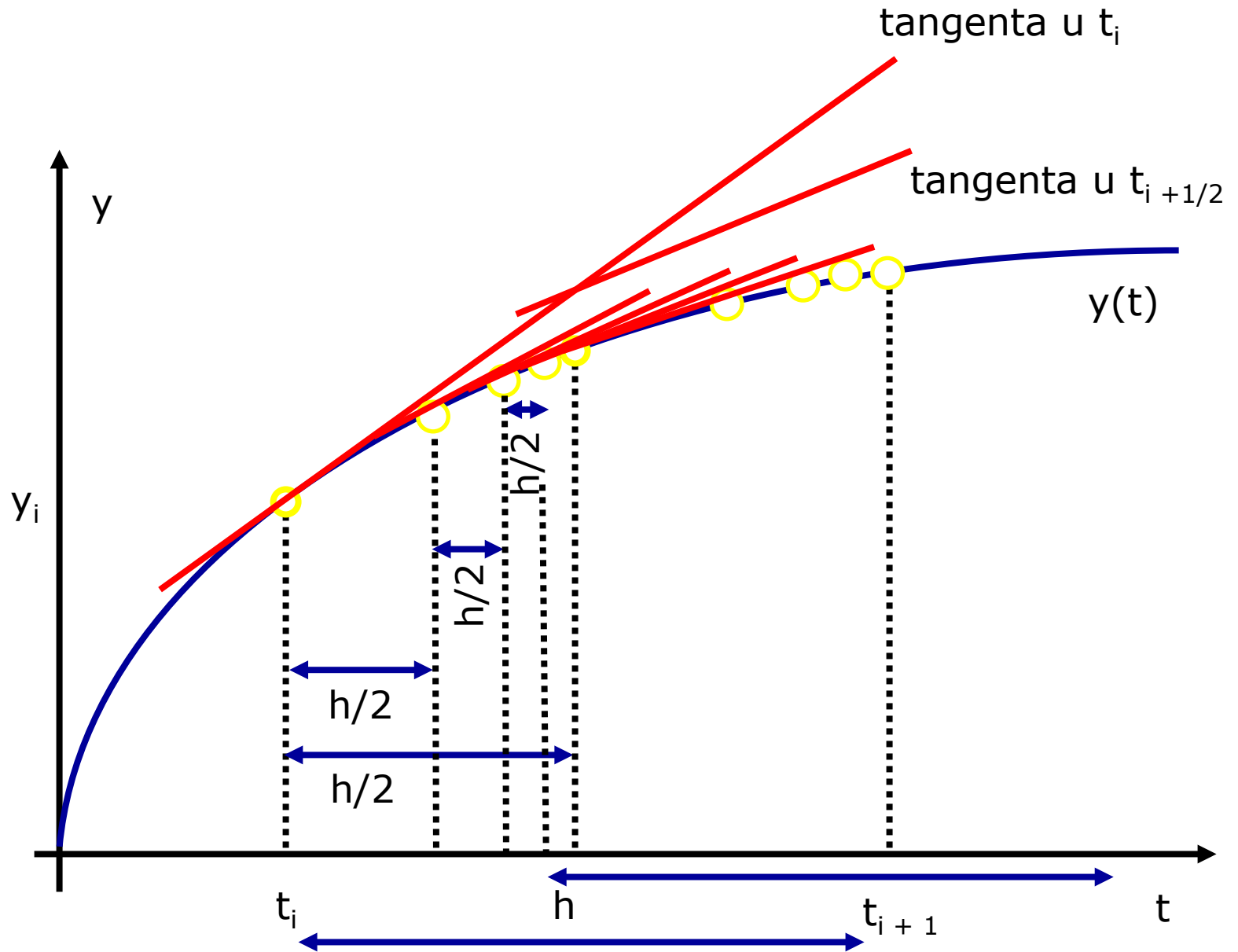
$$\vec{k}_3 = h \cdot \vec{f}\left(\vec{y}_i + \frac{1}{2} \cdot \vec{k}_2\right)$$

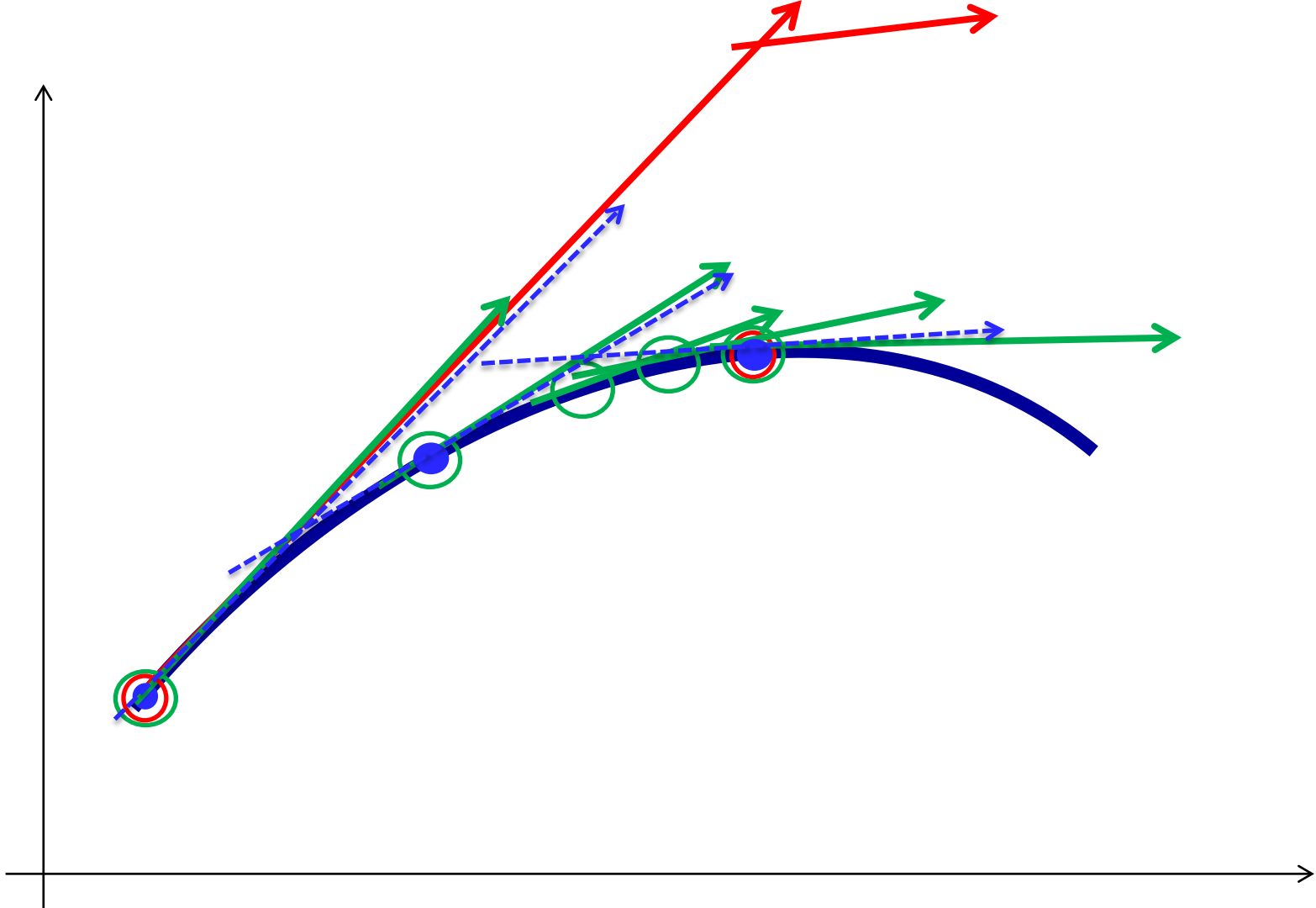
4) tangenta na desnom rubu

$$\vec{k}_4 = h \cdot \vec{f}(\vec{y}_i + \vec{k}_3)$$

$$\vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i + \frac{1}{6} \cdot (\vec{k}_1 + 2 \cdot \vec{k}_2 + 2 \cdot \vec{k}_3 + \vec{k}_4)$$

Metoda integracije: Runge Kutta 4





POVEZNICE:

[List of Runge-Kutta methods](#)

[Runge-Kutta methods](#)



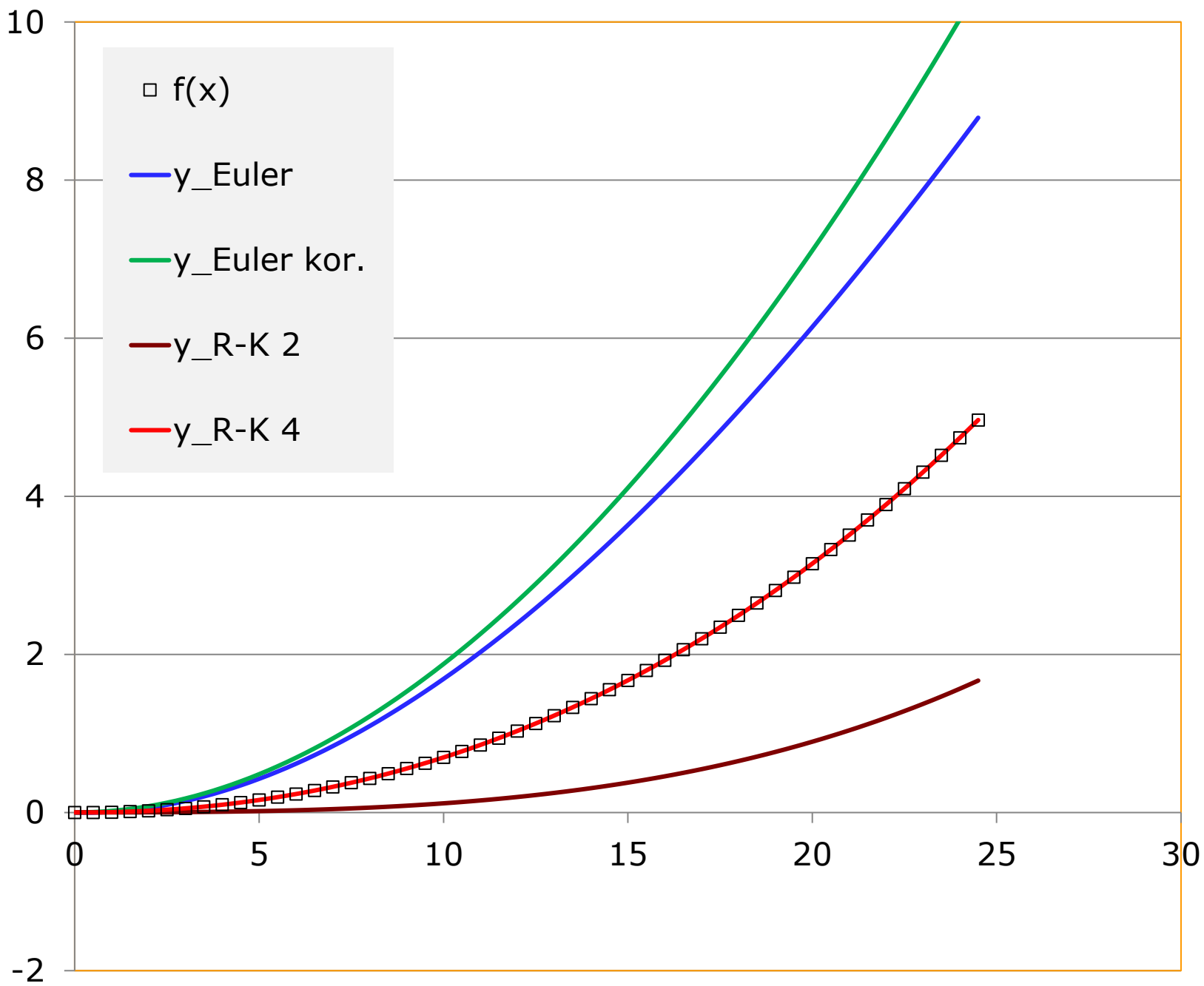
Euler-ova metoda



Runge-Kutta 2



Runge-Kutta 4





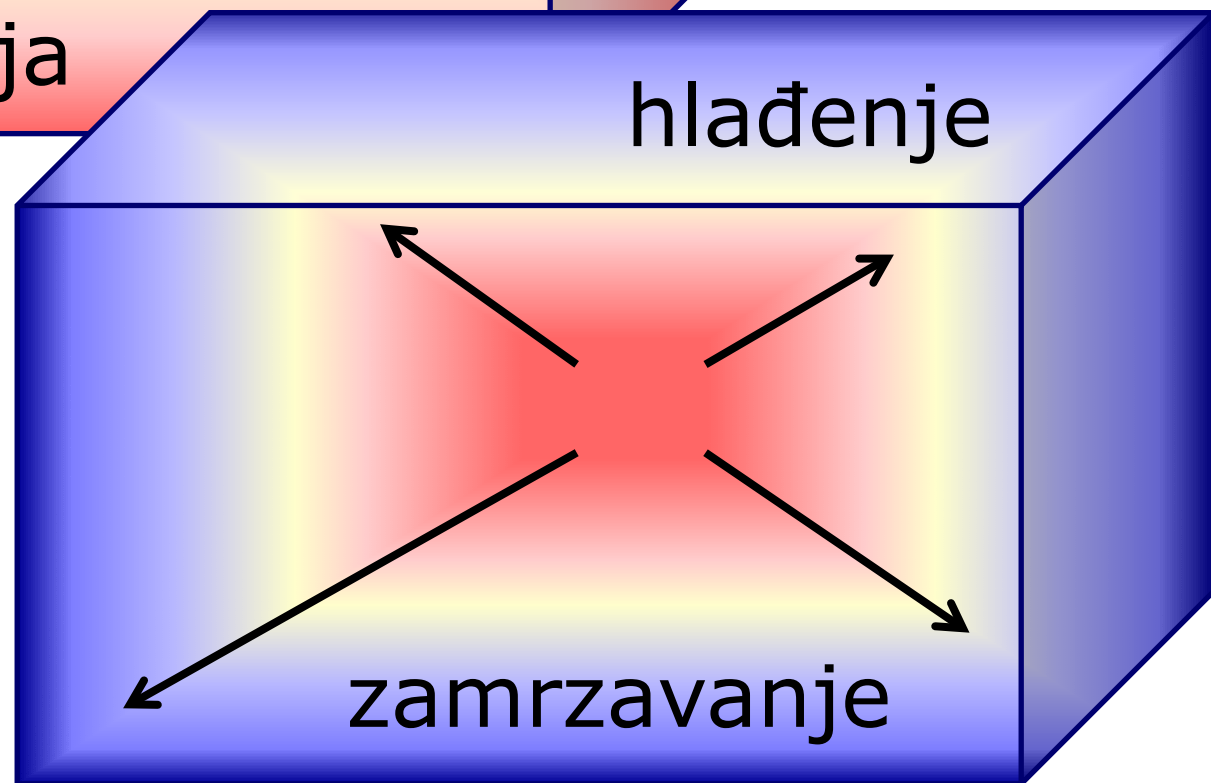
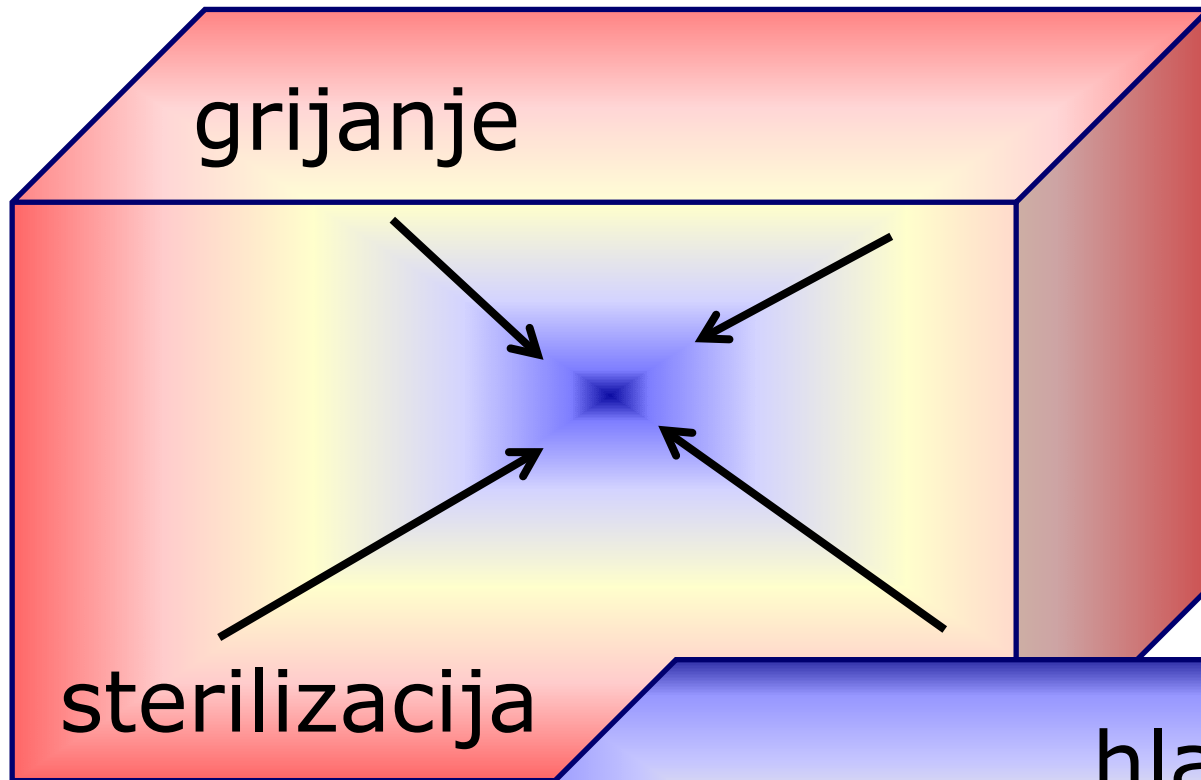
3. Modeli dinamičkih stanja sustava

Model zamrzavanja namirnica

Metoda za rješavanje diferencijalnih jednažbi
(Euler-ova i Runge-Kutta)

Model sterilizacije namirnica

Model upravljanja biokemijskim reaktorom



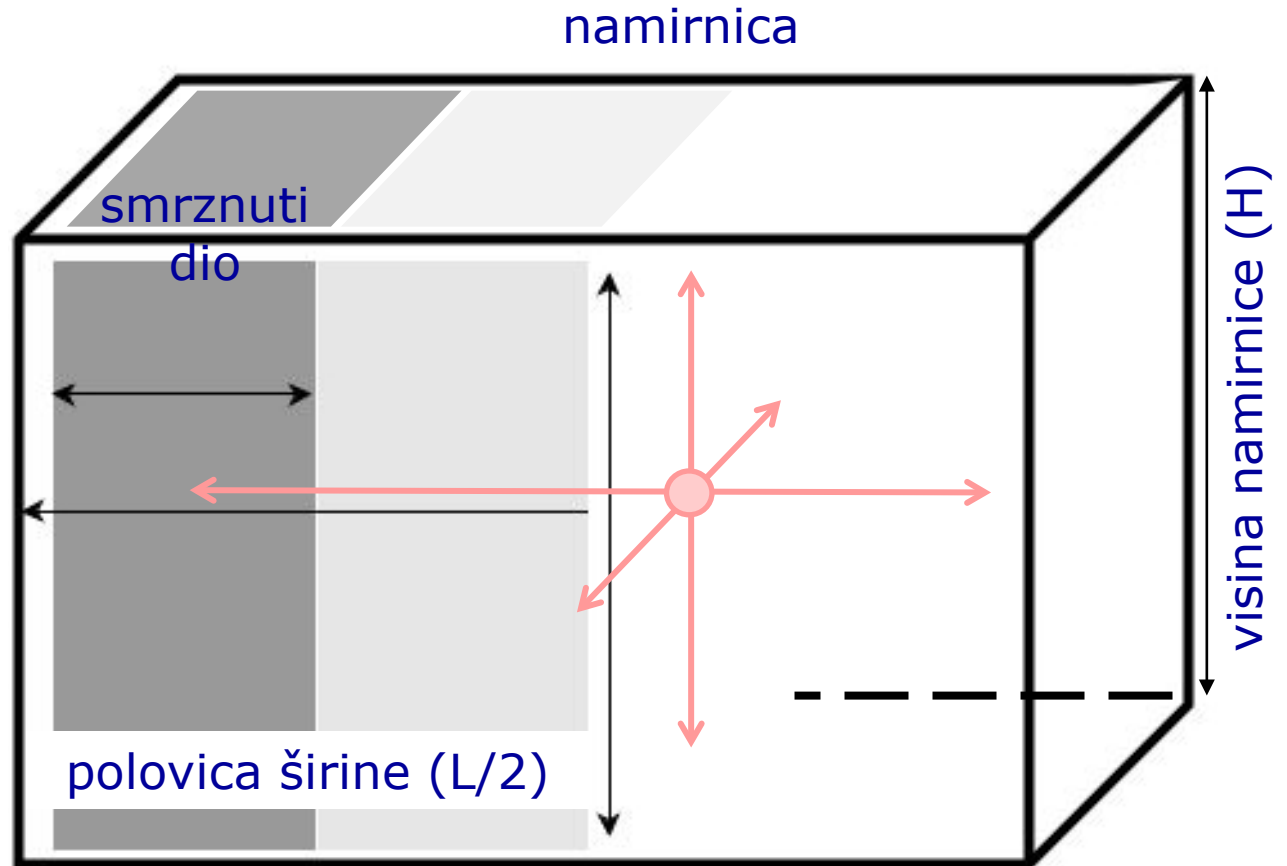
smjer
prijenosa
topline

-20 °C

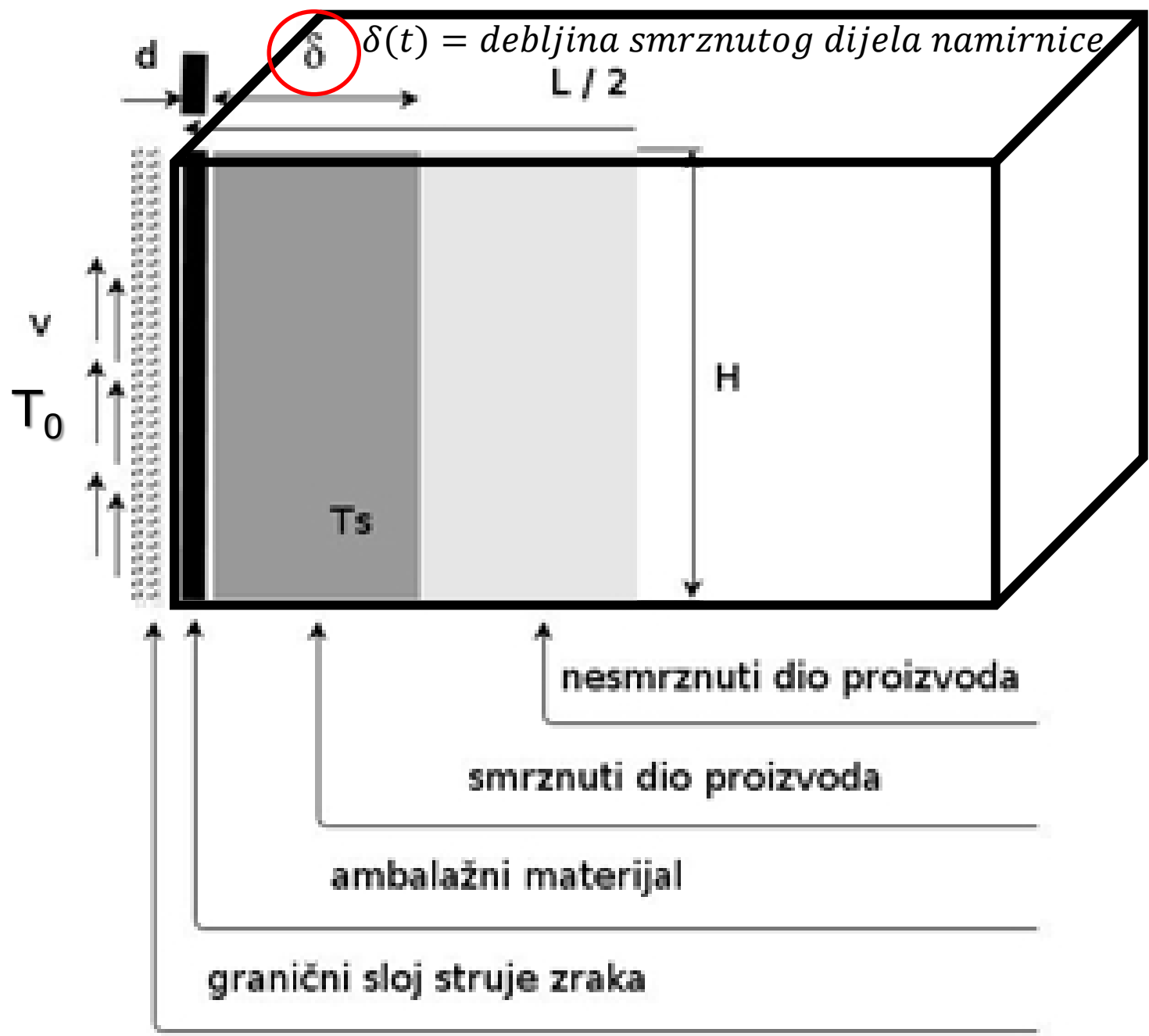
+20 °C



Model zamrzavanja namirnica



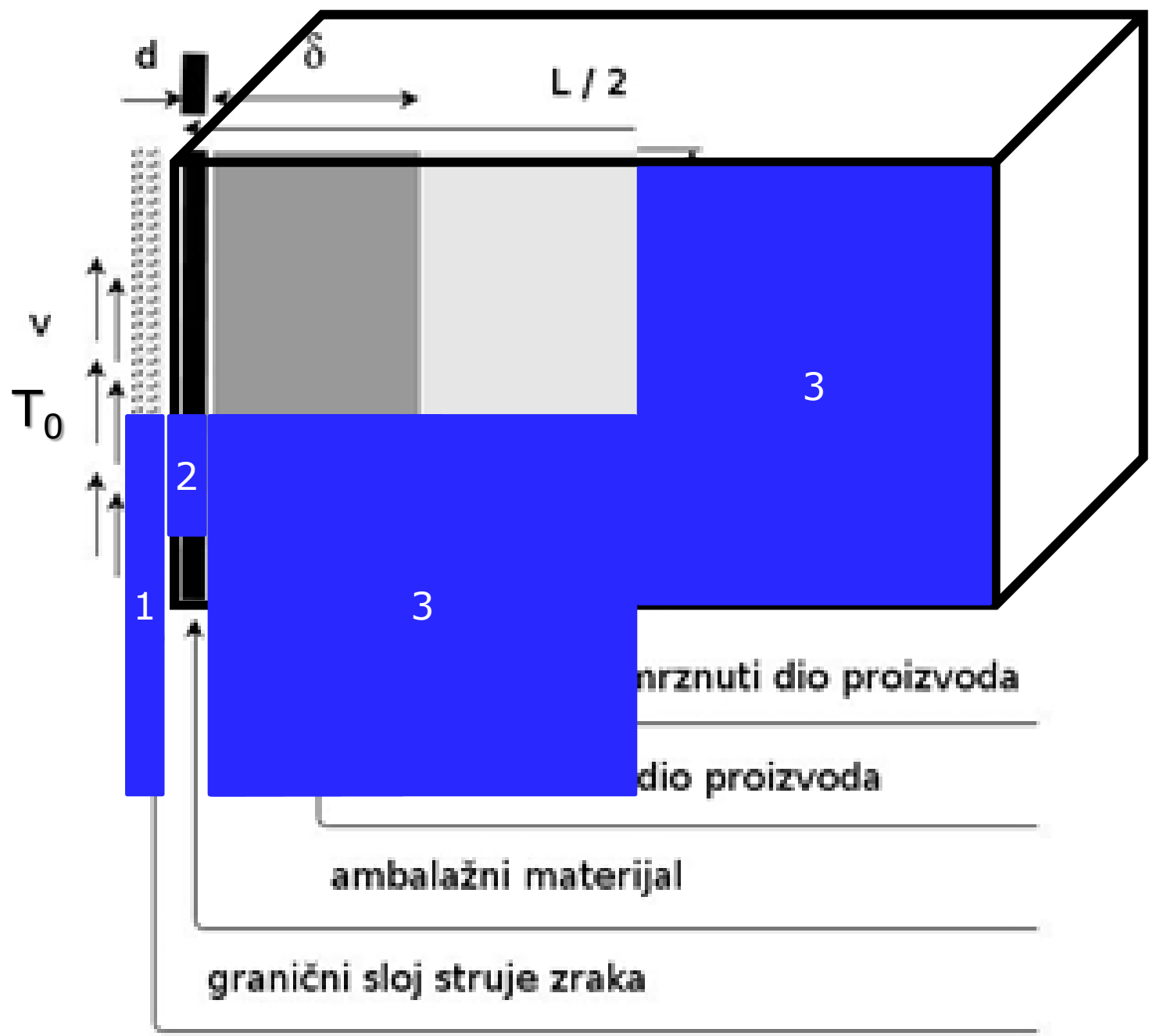
v, T_0 – brzina strujanja i temperatura rashladnog zraka



- model **za analizu** dinamike zamrzavanja prehrambenih proizvoda
- proizvod ima oblik kvadra i nalazi se u ambalaži (pretpostavka!)
- hlađenje se provodi strujanjem hladnog zraka konstantne temperature (pretpostavka!)

- **dinamika procesa zamrzavanja određena je dinamikom prijenosa topline** *s granice nesmrznutog na smrznuti dio proizvoda i s ambalaže na struju hladnog zraka*

- **dinamika prijenosa topline određena je otporima** ($\text{W m}^2 \text{K}^{-1}$):
 1. u graničnom sloju struje zraka (*red veličine* **10^{-2}**),
 2. ambalaže (10^{-5}),
 3. smrznutog dijela proizvoda (**10^{-2}**) i
 4. u graničnom sloju između smrznutog i nesmrznutog dijela proizvoda (10^{-4})





- **matematički model se sastoji od tri dijela:**

1. modela dinamičke bilance topline (R_1 , R_2 , R_3 i R_4),

2. modela otpora prijenosu topline u graničnom sloju i

3. modela sastava prehrambenog proizvoda.

- **dinamika procesa zamrzavanja podijeljena je u tri faze:**

- **u prvoj fazi namirnica se hladi**

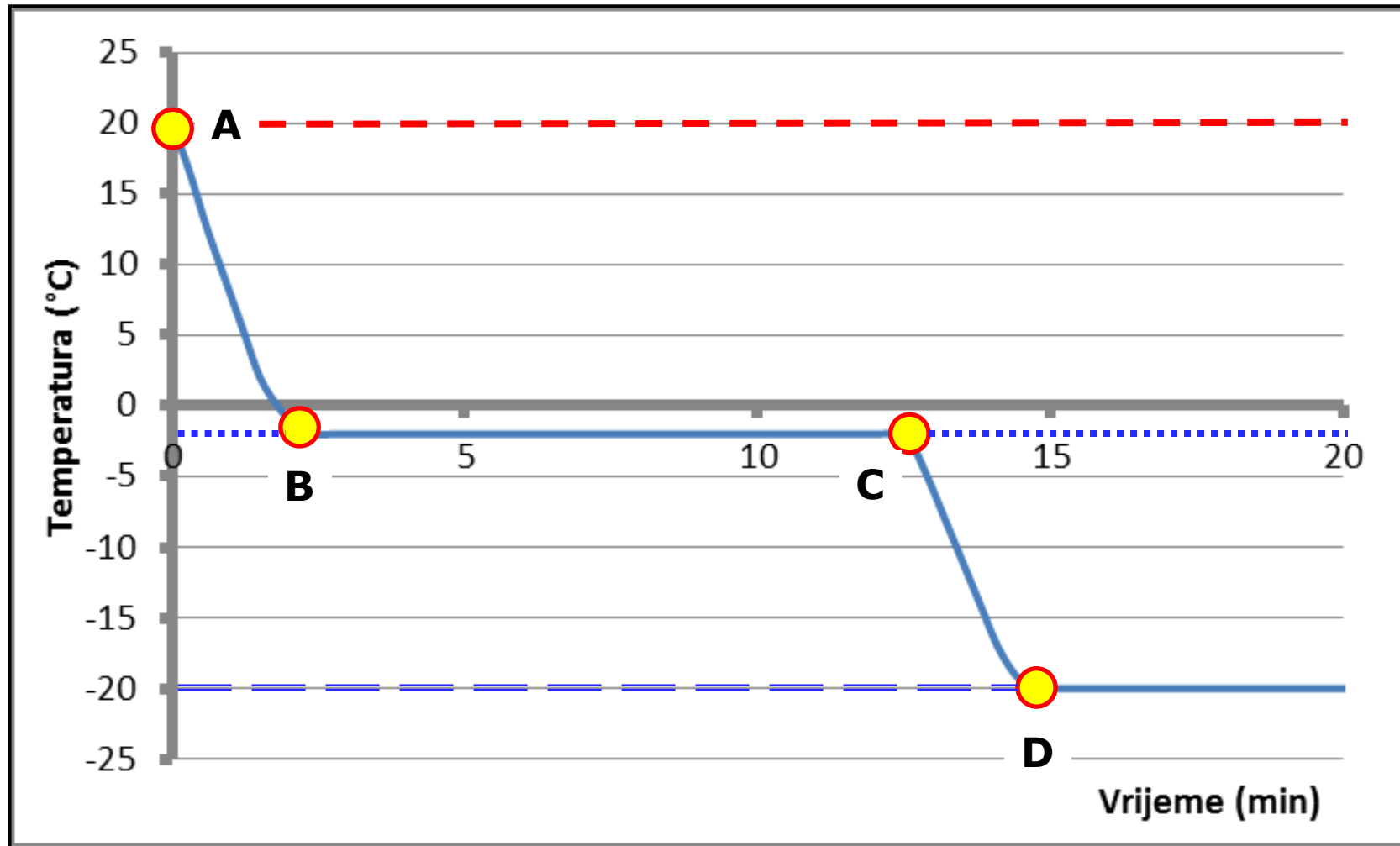
od početne temperature do temperature na kojoj voda u proizvodu prelazi u led,

- **u drugoj fazi pomiče se granica leda i vode** prema središtu materijala

(pretpostavka je da se temperatura proizvoda ne mijenja),

- **u trećoj fazi namirnica je zamrznuta,**

temperatura se snižava i asimptotski se približava temperaturi rashladnog zraka



(A-B) = period hlađenja namirnice do temperature smrzavanja

(B-C) = pomicanje granice smrznuto-nesmrznuto prema unutrašnjosti namirnice
(gotovo da nema promjene temperature)

(C-D) = pothlađivanje potpuno smrznute namirnice na temperaturu rashladnog zraka

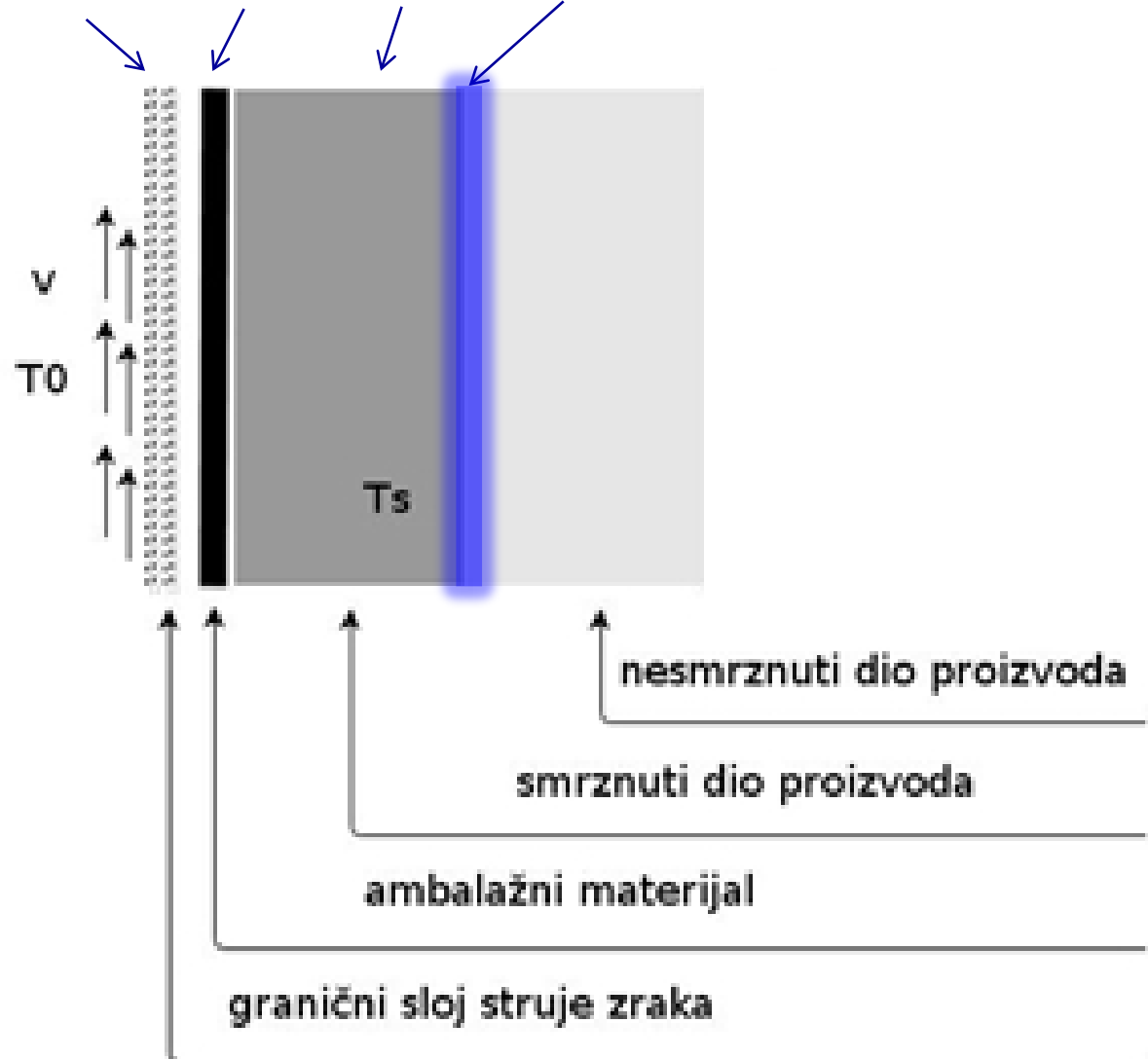
Osnove matematičkog modela zamrzavanja

Dinamika procesa određena je brzinom prijenosa topline

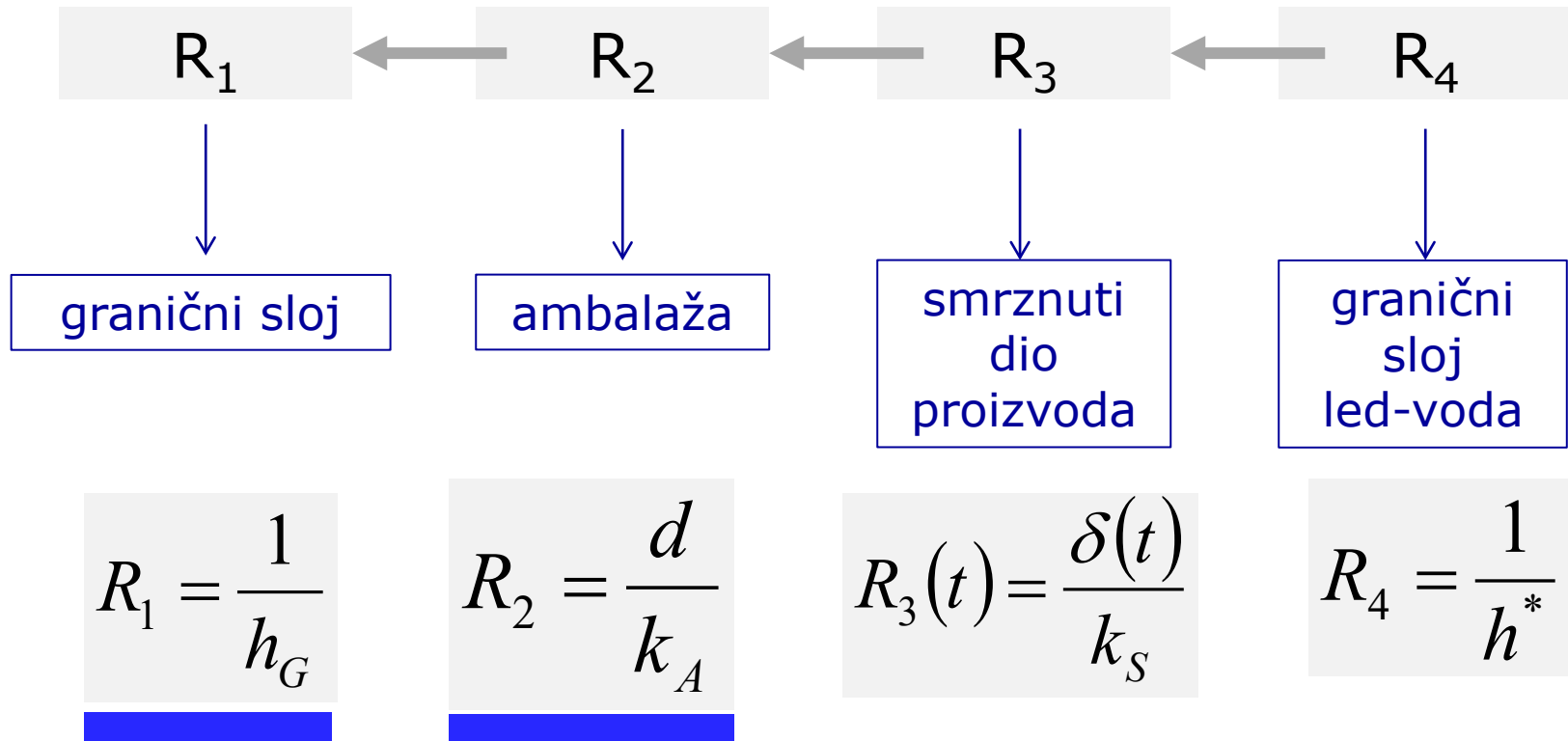
Brzina prijenosa topline je određena s četiri otpora:

- R_1 = otpor hidrodinamičkog graničnog sloja uz ambalažu
- R_2 = otpor ambalaže
- R_3 = otpor smrznutog dijela namirnice
- R_4 = otpor u graničnom sloju smrznuto-nesmrznuto
(*područje u kojemu voda kristalizira*)

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$

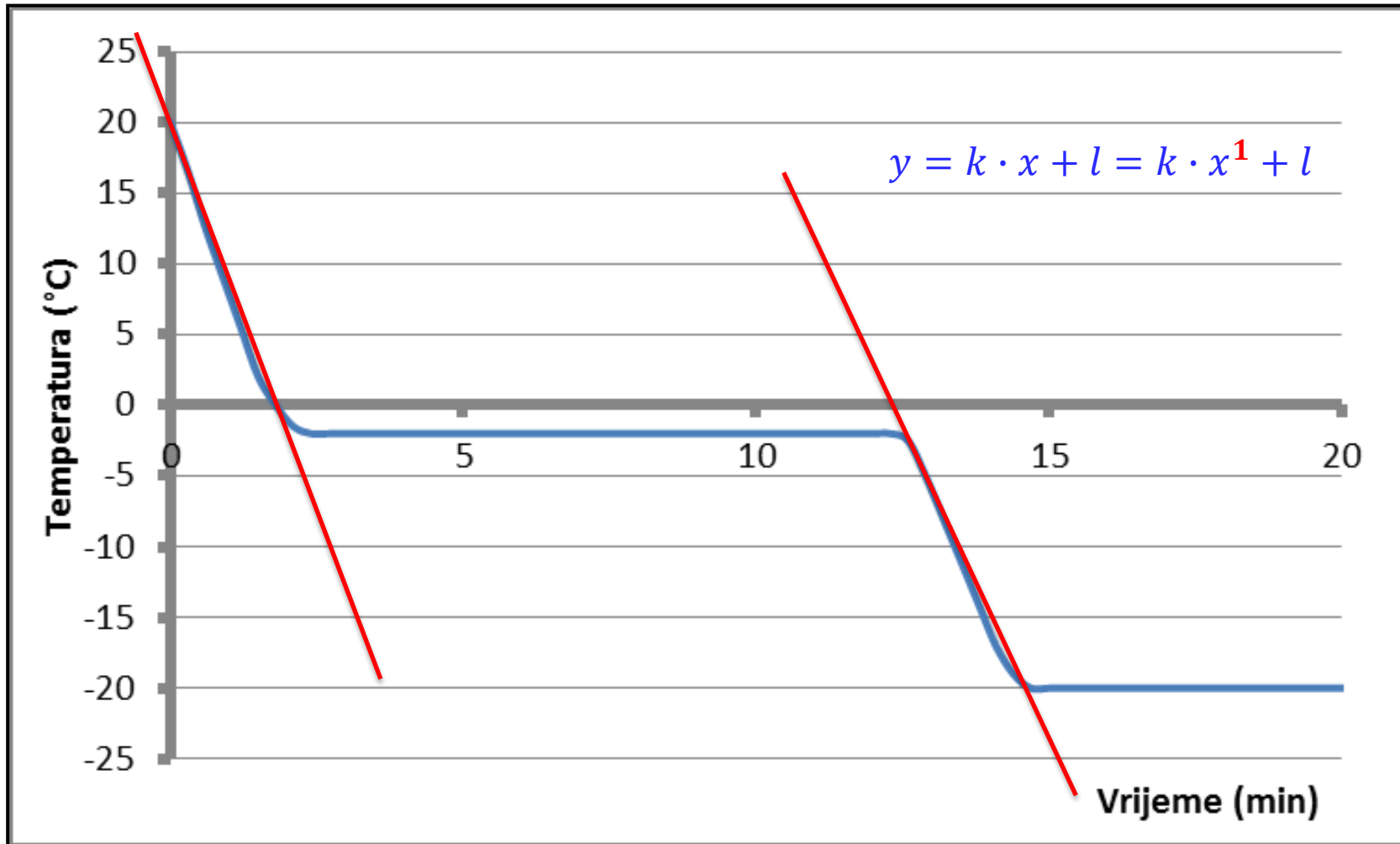


$$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$



R1 i R2 možemo mijenjati u procesu

Prva i treća faza procesa modelirana je procesom prvog reda s usredotočenim parametrima.



- Prva i treća faza procesa modelirana je procesom prvog reda s usredotočenim parametrima.

- Jednadžba modela je:

toplina koja prolazi kroz ambalažu toplina koju namirnica prima

$$\left(\frac{1}{h_g} + \frac{d}{k_A} \right)^{-1} \cdot (T_0 - T) = \rho \cdot c_p \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{dT}{dt}$$

- Termofizički parametri odrede se posebno za proizvod u smrznutom i nesmrznutom stanju
- Brzina zamrzavanja je brzina pomicanja granice leda:

$$v_{\text{zamrzavanja}} = \frac{d}{dt} \delta(t)$$

- Vrijeme zamrzavanja proizvoda definirano je izrazom

$$\delta(t_{\text{zamrzavanja}}) = \frac{L}{2}$$

- proizvod se smrzava hladnim zrakom u području temperatura od 0 do $-50\text{ }^{\circ}\text{C}$

Postupak pri modeliranju

1. za odabranu temperaturu rashladnog zraka prvo se odrede vrijednosti fizičkih, toplinskih i transportnih parametara
2. za odabranu vrijednost brzine strujanja zraka i karakteristične dimenzije izračuna se Reynoldsov broj
3. ovisno o području strujanja odabere se korelacija za Nu broj
4. iz korelacije se zatim odredi koeficijent prijenosa h_G
5. otpor prijenosu topline kroz ambalažu R_A odredi se na osnovu odabranog materijala i njegove debljine

6. toplinska svojstva prehrambenog proizvoda odrede se iz pojednostavljenog modela

proizvod se sastoji od dvije komponente:

suhe tvari i vode

- za **suhu tvar** se **pretpostavi (!)** da ima **konstantnu specifičnu toplinu, gustoću i toplinsku vodljivost**
- za **vodu** se uzimaju vrijednosti u **tekućem i zaleđenom stanju**

Svrha modela:

odrediti brzinu i vrijeme zamrzavanja

Najčešće se piše na slijedeći način [1]:

$$Re = \frac{\text{Dinamički pritisak}}{\text{Smičući napon}} = \frac{\rho v_s^2 / L}{\mu v_s / L^2} = \frac{\rho v_s L}{\mu} = \frac{v_s L}{\nu} = \frac{\text{Inercijalne sile}}{\text{Viskozne sile}}$$

gdje je:

ρ je gustoća fluida u kgm^{-3}

v_s brzina fluida u ms^{-1}

L karakteristična dužina m

μ je (apsolutna) viskoznost fluida Nsm^{-2} ili $\text{Pa}\cdot\text{s}$

ν je kinematička viskoznost fluida, definirana kao $\nu = \mu/\rho$, u m^2s^{-1}

[1] Izvor: http://bs.wikipedia.org/wiki/Reynoldsov_broj

U prijenosu topline na granici (površini) unutar fluida, **Nusseltov broj** je bezdimenzionalni broj koji predstavlja omjer konvekcijskog i kondukcijskog prijenosa topline preko te granice (okomito na tu granicu).

Nusseltov broj blizu ravnoteže, prvenstveno konvekcije i kondukcije manjih intenziteta, karakteristika je laminarnog strujanja.

Veći Nusseltov broj odgovara aktivnijoj konvekciji, sa turbulentnim strujanjem, najčešće u rangu od 100 do 1000. [1]

Konvekcijska i kondukcijska strujanja topline su paralelna jedna s drugim, kao i s površinskom normalom/okomicom granične površine, a svi su okomiti na srednje strujanje fluida u jednostavnom slučaju.

$$Nu_L = \frac{hL}{k_f} = \frac{\textit{konvekcijski prijenos topline}}{\textit{kondukcijski prijenos topline}}$$

gdje je:

h - konvekcijski koeficijent prijenosa topline

L - karakteristična dužina

k_f - toplinska vodljivost fluida

[1] Izvor: http://bs.wikipedia.org/wiki/Nusseltovov_broj

Bilanca topline

- **pretpostavka** o "kvazistacionarnosti" procesa (*prividno stacionarno stanje*)
- neprekidno se mijenja debljina smrznutog sloja
- brzina smrzavanja = brzina prijenosa topline
toplina koju namirnica prima **toplina koja prolazi kroz ambalažu**

$$H_L \cdot x \cdot S \cdot \frac{d\delta(t)}{dt} = h(t) \cdot S \cdot (T_s - T_0)$$

H_L - latentna topline smrzavanja (npr. od +20 °C do 0 °C) ($H_L = 335 \text{ kJ kg}^{-1}$)

Latentna topline je količina topline potrebna za zagrijavanje 1 kg vode od 0 °C do 100 °C.

Ista količina topline potrebna je i za smrzavanje.

$$Q = 1 \text{ (kg)} \cdot 4190 \text{ (J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}) \cdot 100 \text{ °C} = 4,19 \cdot 10^5 \text{ (J)} = 419 \text{ (kJ)}$$

(Voda se u namirnicama nalazi najčešće na dnevnoj temperaturi, koja je bliže temperaturi 0 °C nego 100 °C. Zato je potrebno dovesti više topline za isparavanje nego za smrzavanje vode.)

- koeficijent toplinske vodljivosti vode je $0,588 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- koeficijent toplinske vodljivosti leda se izračuna prema formuli

$$k_{\text{leda}} \left(\frac{\text{W}}{\text{m K}} \right) = 2,21 - 0,0114 \cdot t_s (\text{°C})$$

- t_s je temperatura na kojoj proizvod zamrzava

Dinamička bilanca

- dinamika procesa zamrzavanja je određena diferencijalnom jednačinom koja se izvede iz bilance toplote kada se upotrijebi limes bilance za $\Delta t \rightarrow dt$ i $\Delta\delta \rightarrow d\delta$

$$\left(\frac{T_s - T_0}{\rho \cdot x \cdot H_L} \right) = \left(\frac{1}{h_G} + \frac{d_A}{k_A} + \frac{\delta(t)}{k_S} + \frac{1}{h^*} \right) \cdot \frac{d\delta(t)}{dt}$$

početni uvjet: $t = 0$; $\delta_{t=0} = 0$

Na početku procesa nema leda u namirnici.

- nakon separacije varijabli integriramo lijevu i desnu stranu

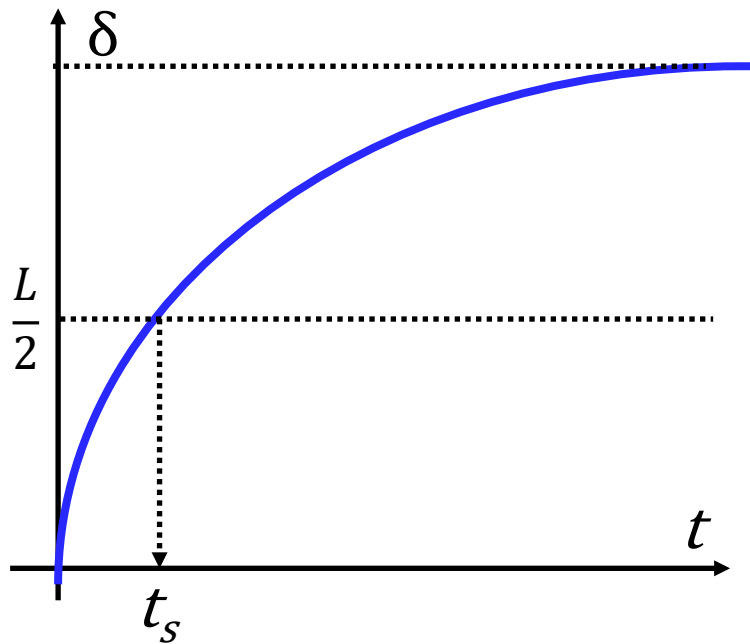
$$\int_0^t \left(\frac{T_s - T_0}{\rho \cdot x \cdot H_L} \right) \cdot dt = \int_0^{\delta(t)} \left(\frac{1}{h_G} + \frac{d_A}{k_A} + \frac{\delta(t)}{k_S} + \frac{1}{h^*} \right) \cdot d\delta$$

$$\int_0^t \left(\frac{T_s - T_0}{\rho \cdot x \cdot H_L} \right) \cdot dt = \int_0^{\delta(t)} \left(\frac{1}{h_G} + \frac{d_A}{k_A} + \frac{\delta(t)}{k_S} + \frac{1}{h^*} \right) \cdot d\delta$$

- integriramo svaki član zasebno:

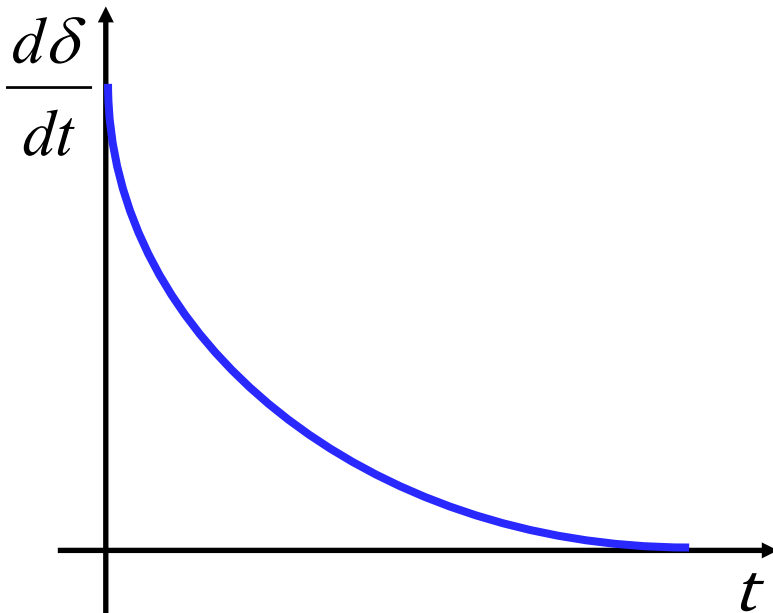
$$\frac{T_s - T_0}{\rho \cdot x \cdot H_L} \cdot t = \left(\frac{1}{h_G} + \frac{d_A}{k_A} + \frac{1}{h^*} \right) \cdot \delta + \frac{1}{2 \cdot k_S} \cdot \delta^2$$

Rješenje diferencijalne jednačbe



vrijeme zamrzavanja

$$\delta(t_{\text{zamrzavanja}}) = \frac{L}{2}$$



brzina zamrzavanja

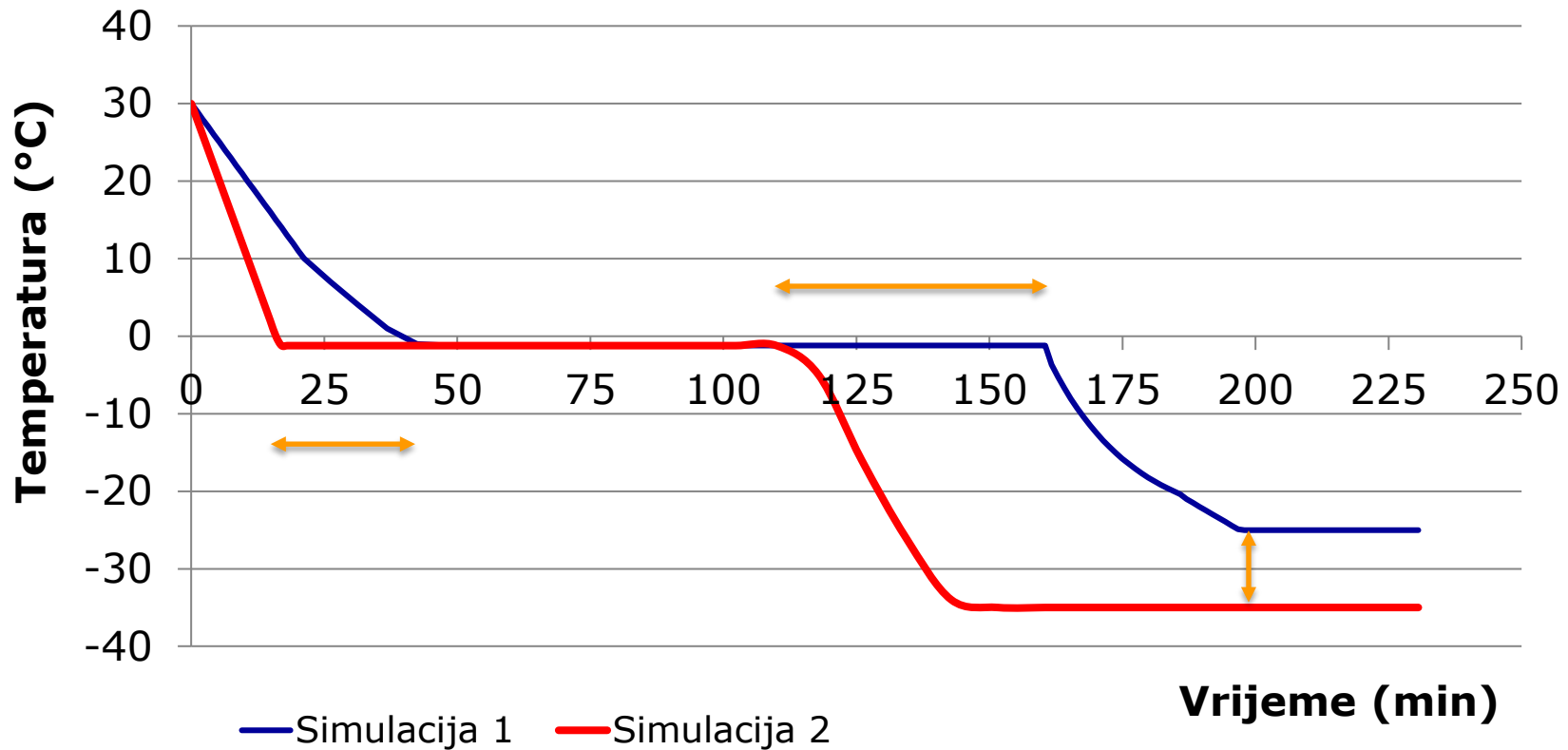
$$v_{\text{zamrzavanja}} = \frac{d}{dt} \delta(t)$$

U početku se brzo pomiče granica smrznuto-nesmrznuto, a kasnije je sve deblji sloj leda i granica se pomiče sve sporije.

Primjer: model i simulacija procesa zamrzavanja

- simulacijskim programom određuju se brzina i vrijeme zamrzavanja za slijedeće odabrane parametre:
 - vrstu **proizvoda**,
 - dimenzije, vrstu i debljinu **ambalaže** i
 - brzinu i temperaturu **rashladnog medija** (zraka).

Dinamika smrzavanja teletine





3. Modeli dinamičkih stanja sustava

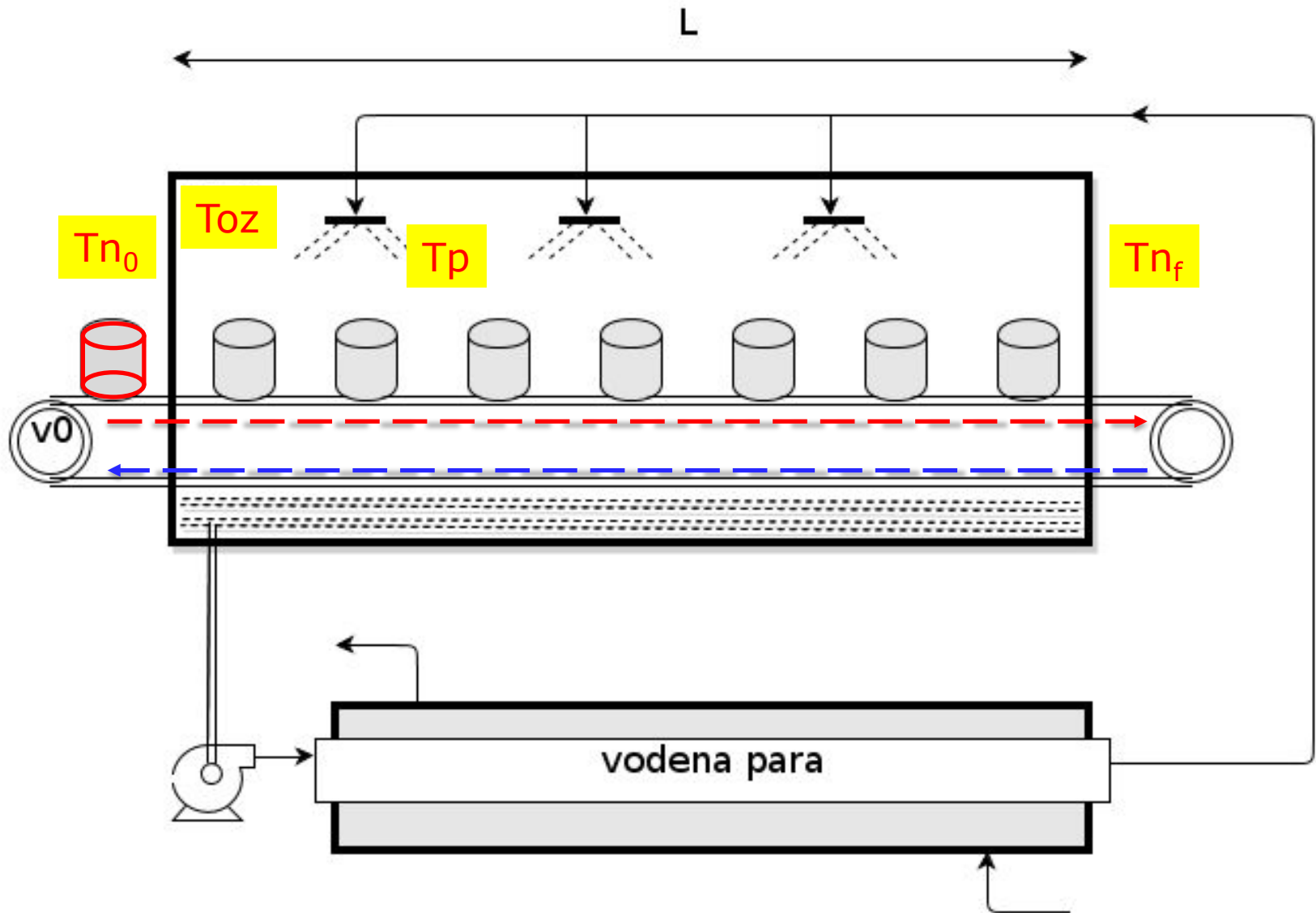
Model smrzavanja namirnica

Eulerova metoda za rješavanje običnih
diferencijalnih jednažbi

Model sterilizacije namirnica

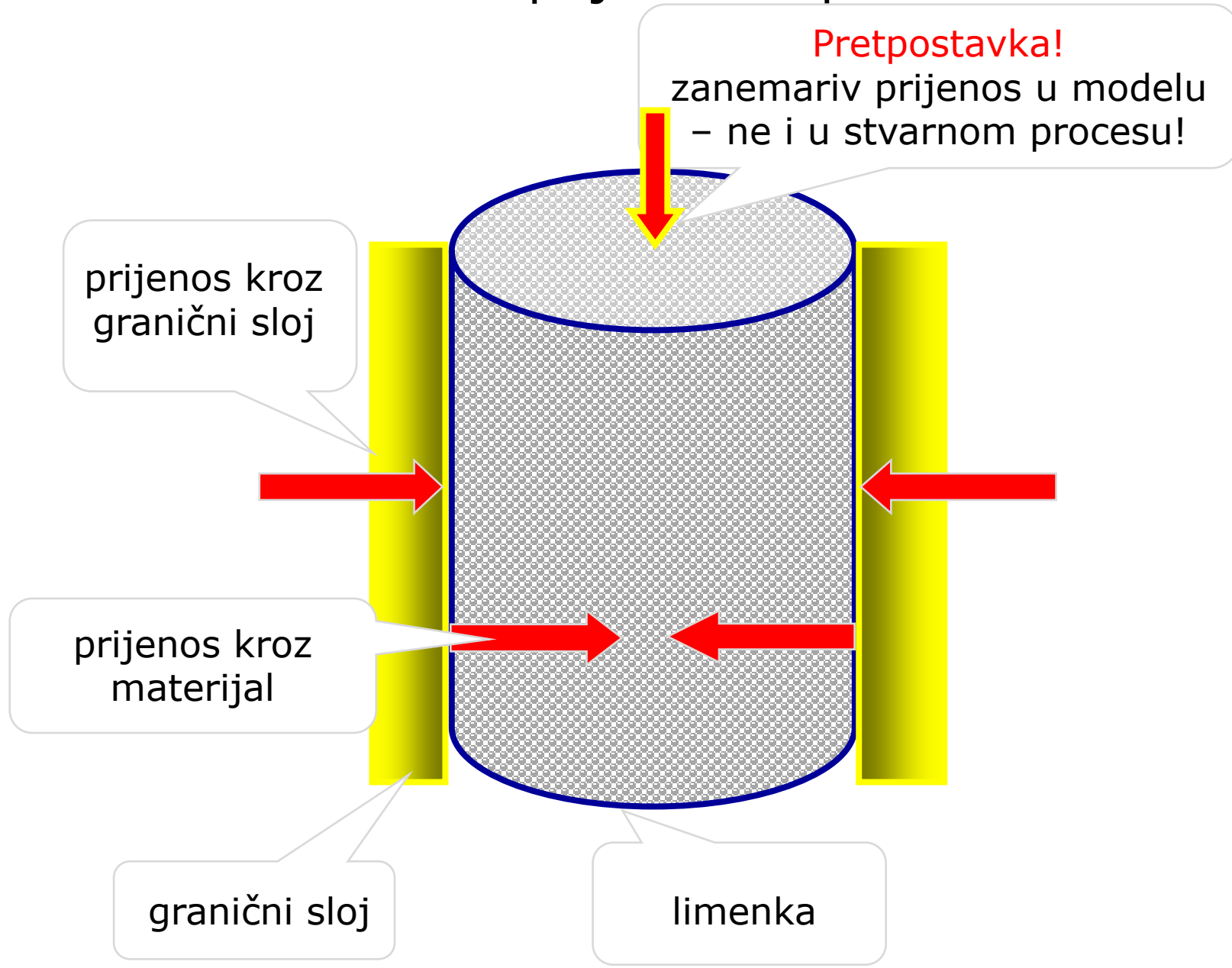
Model upravljanja biokemijskim reaktorom

Shematski prikaz tunelskog sterilizatora

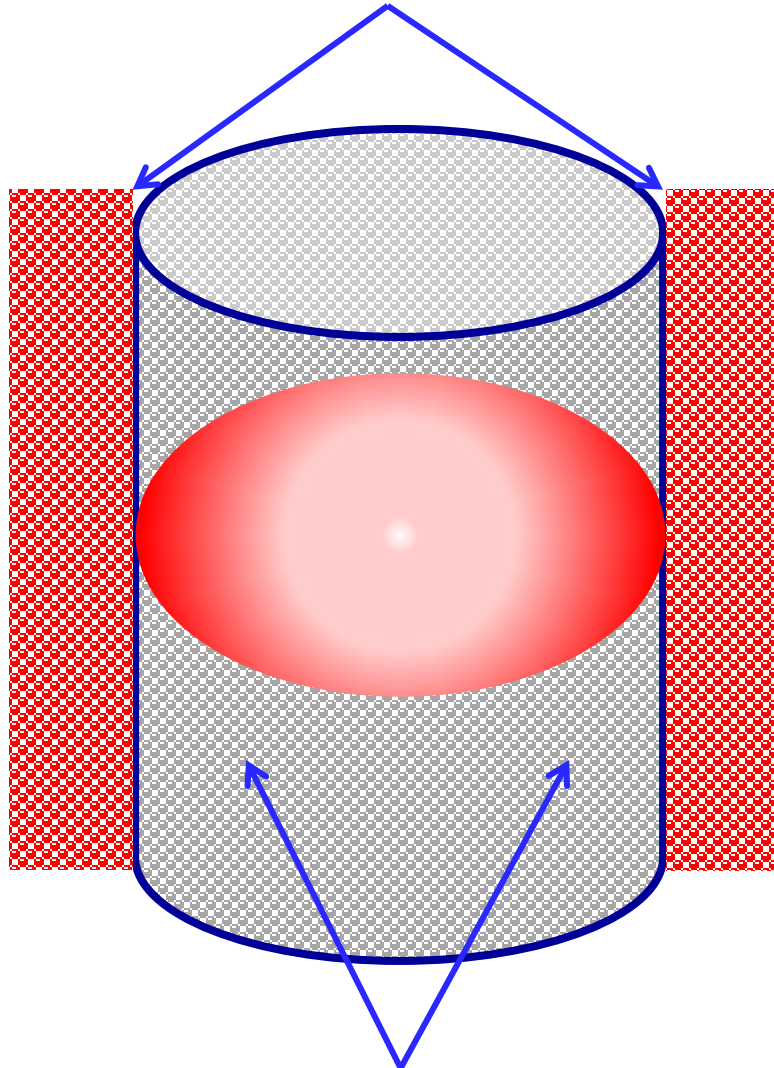


- vrijeme simulacije procesa je:

Mehanizmi prijenosa topline

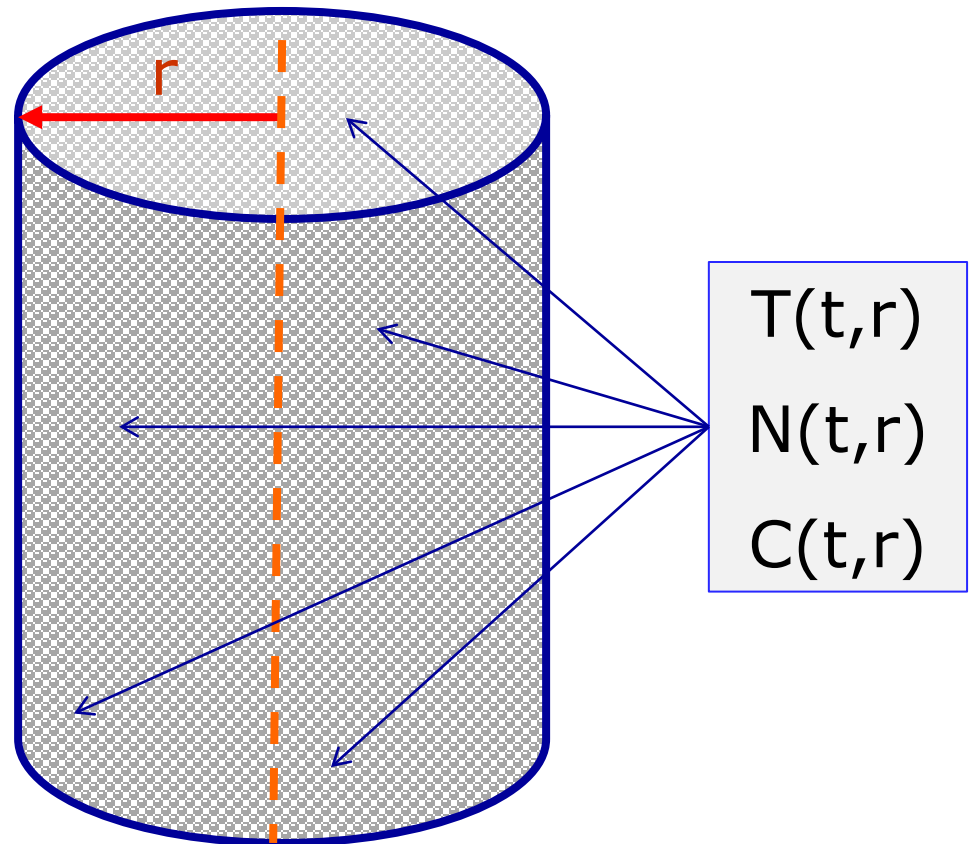


granični sloj:
prijenos topline u procesu ukapljivanja vodene pare

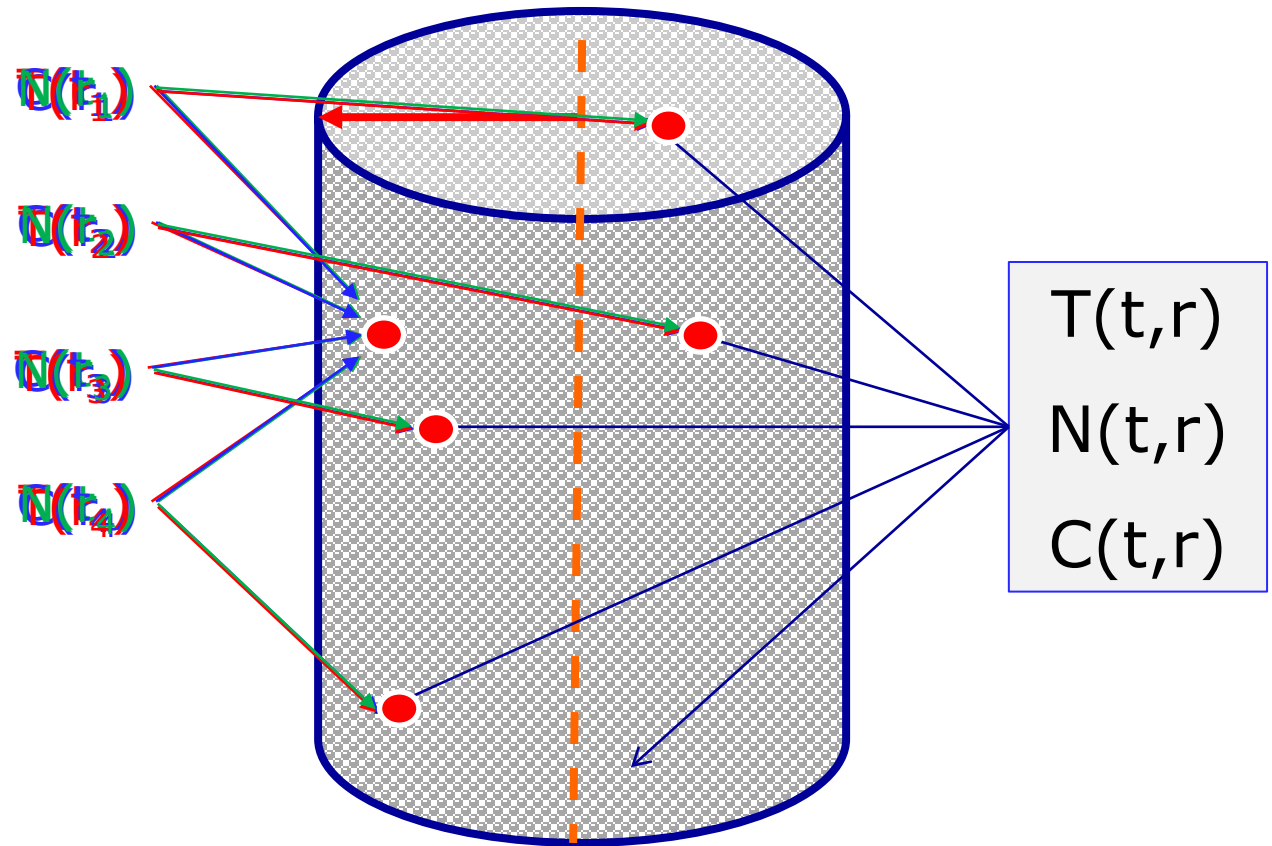


u namirnici:
prijenos topline kondukcijom

Veličine stanja (opisuju stanje namirnice)

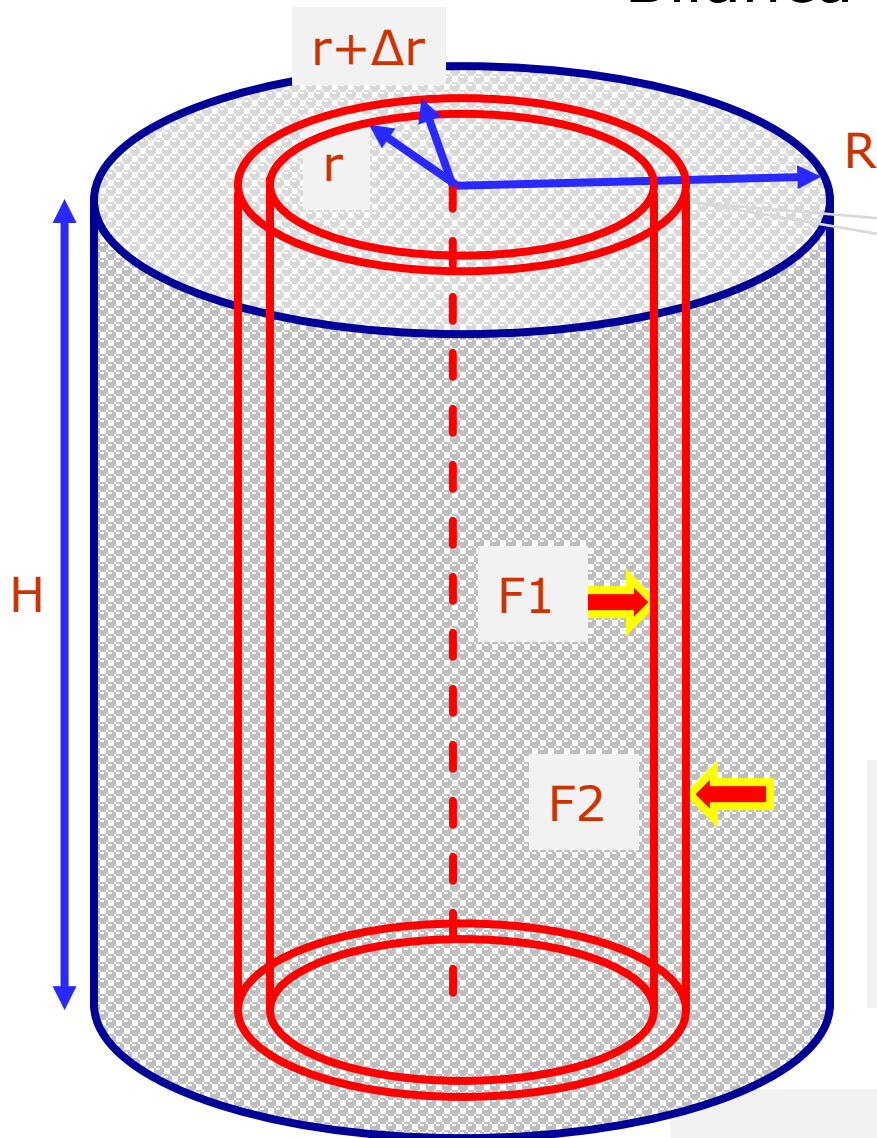


matematički model
s raspodijeljenim (distribuiranim) veličinama stanja



matematički model
s raspodijeljenim (distribuiranim) veličinama stanja

Bilanca topline



Matematički modeli toplinskih procesa temelje se na bilancama topline.

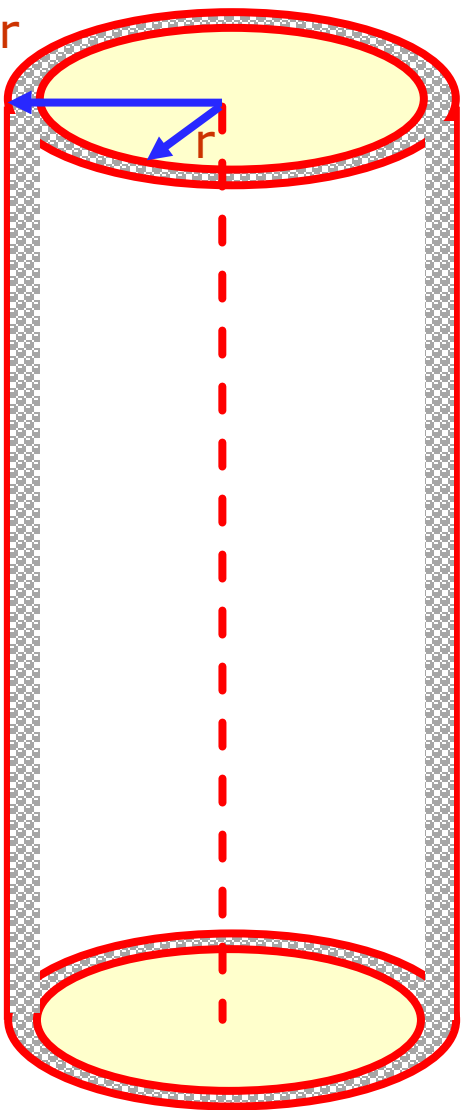
isječak valjka ΔV

$$\Delta V = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \Delta r \cdot H$$

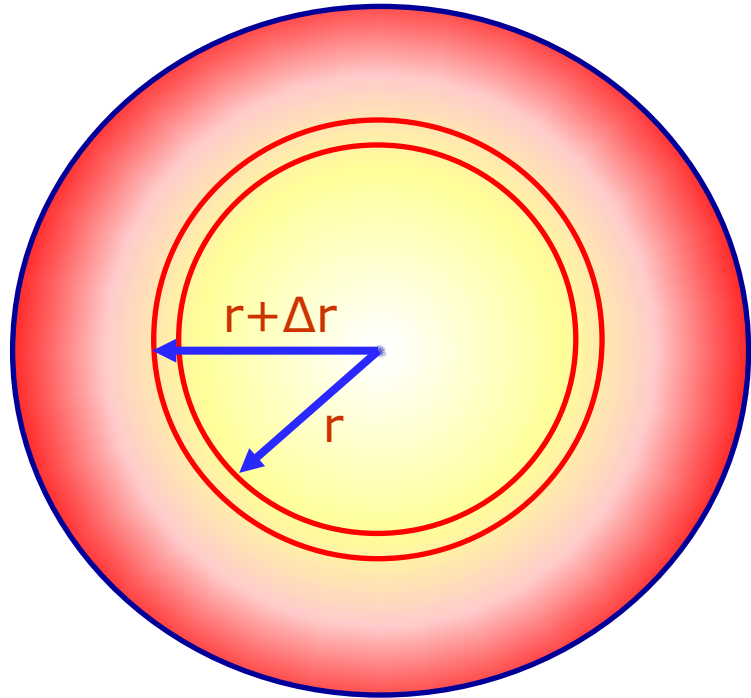
$$F1 = -2 \cdot r \cdot \pi \cdot H \cdot k \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_r$$

$$F2 = -2 \cdot (r + \Delta r) \cdot \pi \cdot H \cdot k \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r + \Delta r}$$

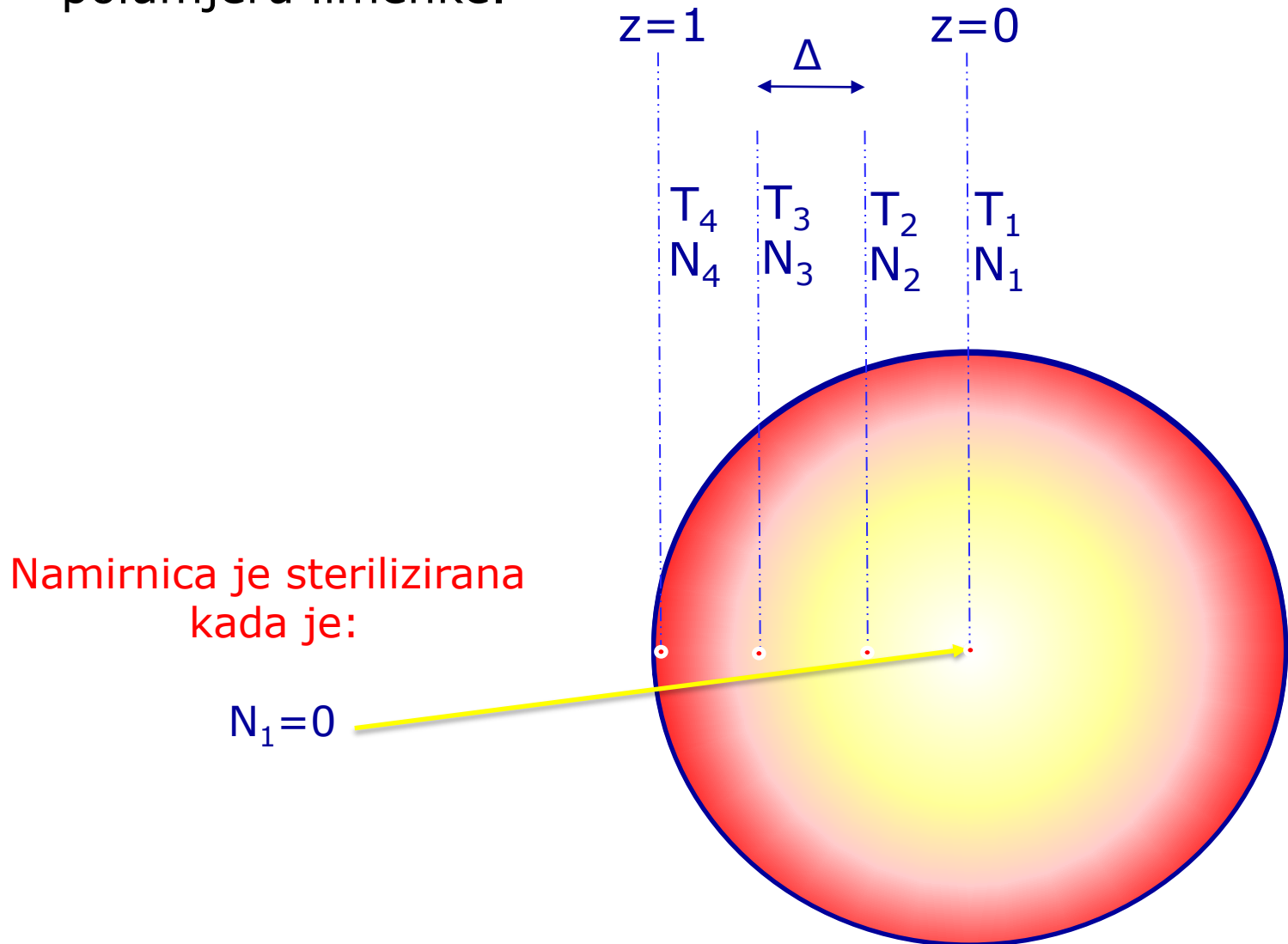
$r + \Delta r$



isječak valjka ΔV



- Da bi se razvio i koristio model, potrebno je mjeriti/izračunavati temperature na četiri pozicije na polumjeru limenke.



Jednadžba bilance topline

brzina promjene akumulacije = ulazni tok - izlazni tok

$$\frac{\Delta}{\Delta t} (2 \cdot \pi \cdot r \cdot \Delta r \cdot H \cdot \rho \cdot c_p \cdot T(r, t))$$

$$V \cdot \rho = m$$

$$2 \cdot \pi \cdot (r + \Delta r) \cdot H \cdot k \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r+\Delta r}$$

$$2 \cdot \pi \cdot r \cdot H \cdot k \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_r$$

uvrstimo izraze u bilancu

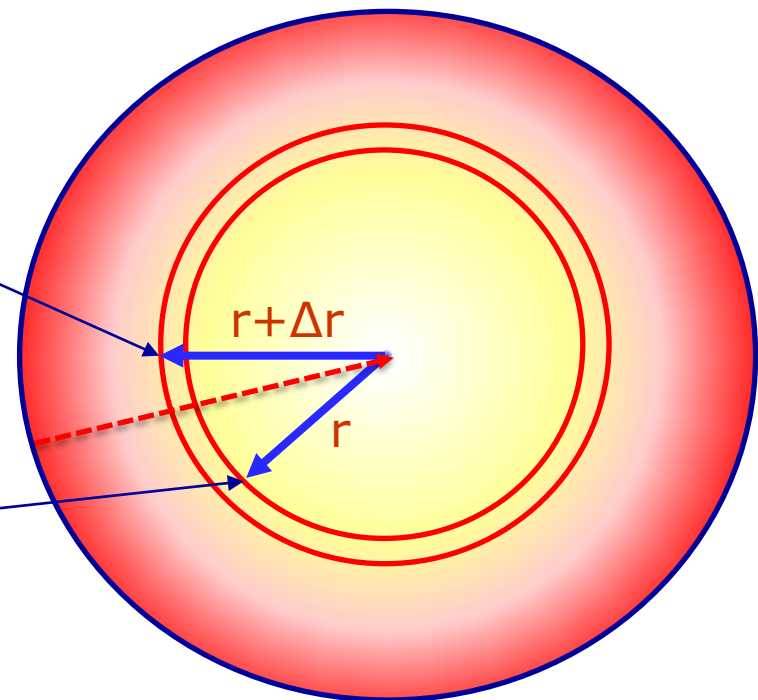
$$\frac{\Delta}{\Delta t} [2 \cdot r \cdot \pi \cdot H \cdot \Delta r \cdot \rho \cdot c_p \cdot T(r, t)] =$$

$$= -2 \cdot r \cdot \pi \cdot H \cdot k \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_r + 2 \cdot (r + \Delta r) \cdot \pi \cdot H \cdot k \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r+\Delta r}$$

Zašto „-“ i „+“ ???

Ovdje toplina
dolazi u isječak

Ovdje toplina
odlazi iz isječka



$$\frac{\Delta}{\Delta t} \left[\underline{2} \cdot \underline{r} \cdot \underline{\pi} \cdot \underline{H} \cdot \Delta r \cdot \rho \cdot c_p \cdot T(r, t) \right] =$$

$$= \underline{-2} \cdot \underline{r} \cdot \underline{\pi} \cdot \underline{H} \cdot k \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_r + \underline{2} \cdot (r + \Delta r) \cdot \underline{\pi} \cdot \underline{H} \cdot k \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r+\Delta r}$$

pokratimo s $2 \cdot \pi \cdot H$ i preuredimo u novi oblik:

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\Delta T(r, t)}{\Delta t} = k \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{(r + \Delta r) \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r+\Delta r} - r \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_r}{\Delta r}$$

primijenimo granični postupak: $\Delta t \rightarrow dt$ $\Delta r \rightarrow dr$

dobije se parcijalna diferencijalna jednačba:

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = k \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Bilanca broja mikroorganizama

- kinetika procesa uništenja mikroorganizama:

model procesa prvog reda

- veličina stanja: koncentracija/broj mikroorganizama $N(r, t)$

- kinetički model:

$$r = -k(T) \cdot N(r, t)^1$$

- zanemarivi su ulazni i izlazni tokovi mikroorganizama jer u tunelnom sterilizatoru nema konvekcijskih struja u materijalu (ne postoji mogućnost transporta m-z iz okoline u namirnicu)

- jednačina bilance glasi:

$$\frac{\partial N(r, t)}{\partial t} = -k(T) \cdot N(r, t)^1$$

specifična brzina uništenja mikroorganizama pri temperaturi T

Model specifične brzine odumiranja mikroorganizama - $k(T)$

$$k(T) = \frac{\ln(10)}{D(T(r,t))} = \frac{2,302585}{D(T(r,t))}$$

$$D(T) = D_{ref} \cdot 10^{\frac{T_{ref} - T(r,t)}{z}}$$

D_{ref} = decimalno vrijeme redukcije
 T_{ref} = referentna temperatura

Model dinamike promjene koncentracije vitamina (npr. C ili B₆)

$$\frac{\partial c(r,t)}{\partial t} = -k_0 \cdot e^{-\frac{E}{R \cdot T(r,t)}} \cdot c(r,t)$$

2,718252

Bezdimenzijske značajke

bezdimenzijska udaljenost:

$$z = \frac{r}{R}$$

toplinska difuzivnost:

$$\alpha = \frac{k}{\rho \cdot c_p}$$

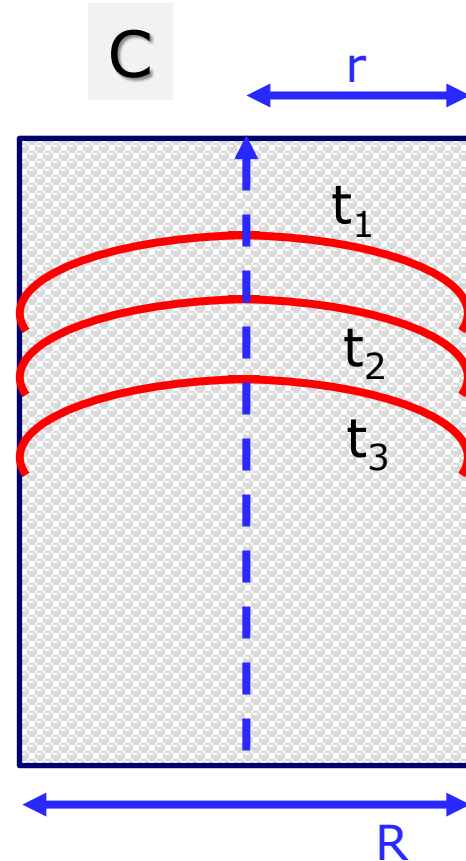
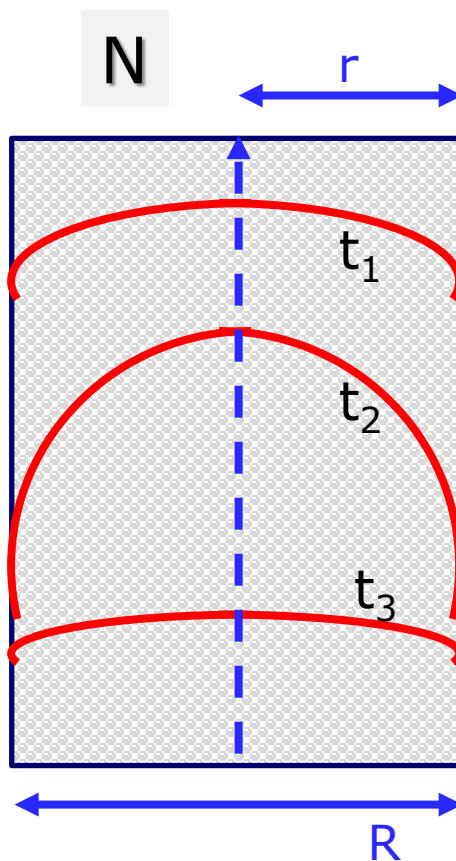
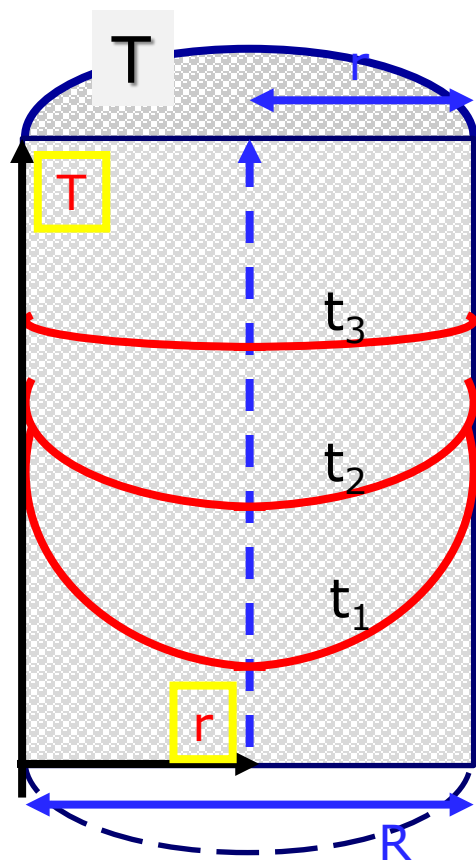
bezdimenzijsko vrijeme - Fourierova značajka:

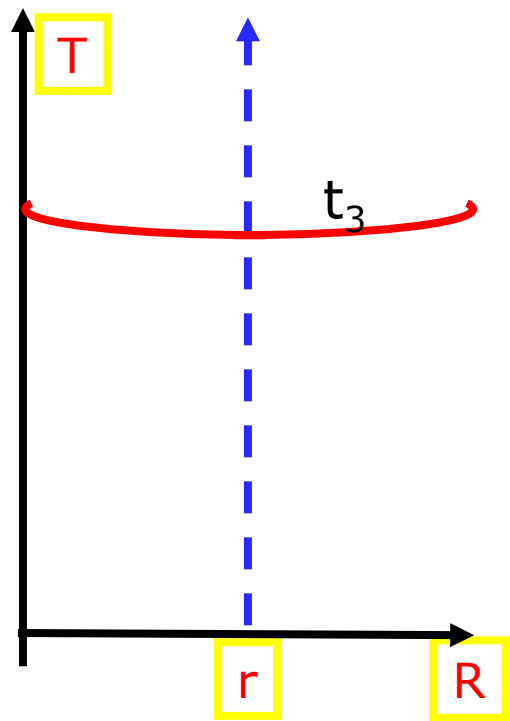
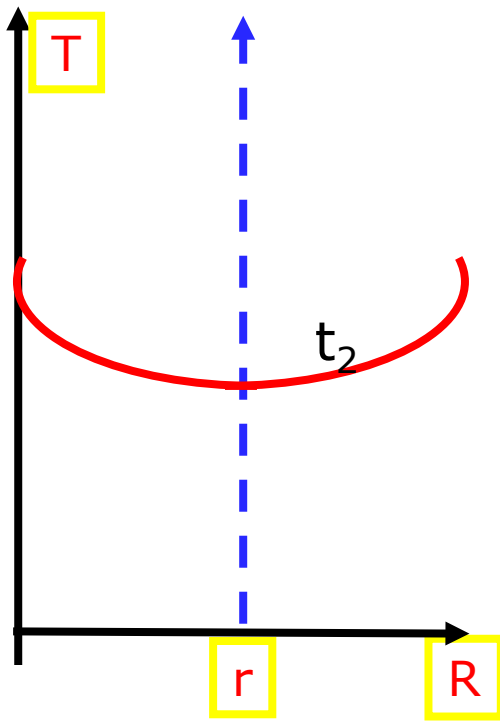
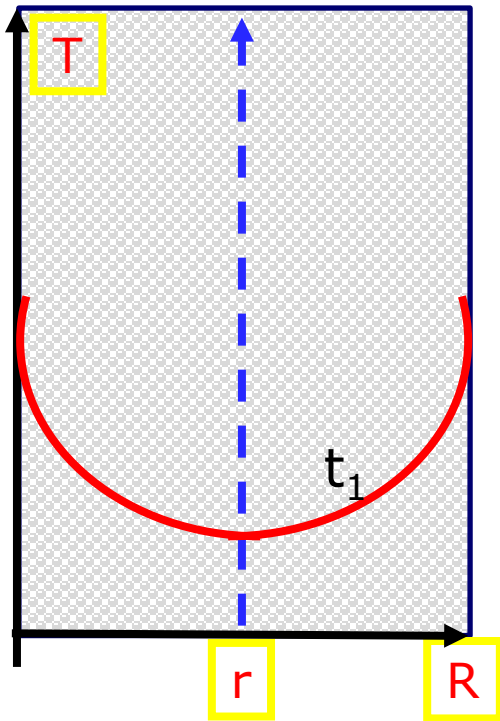
$$Fo = \frac{\alpha \cdot t}{R^2}$$

bezdimenzijska temperatura:

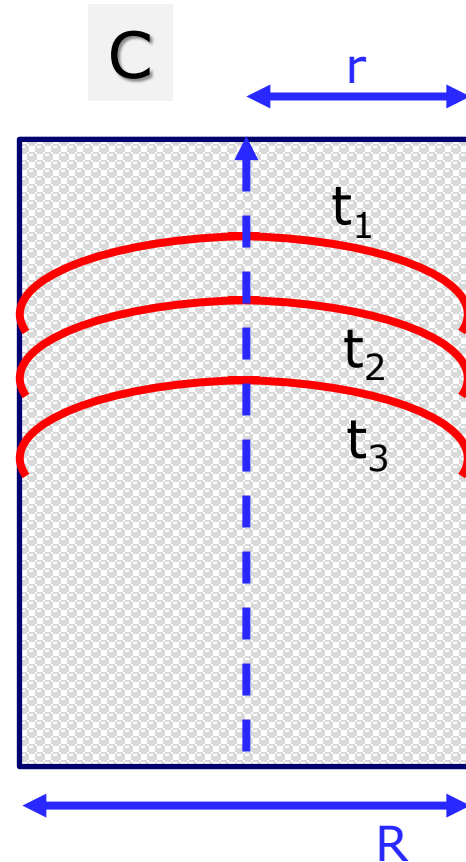
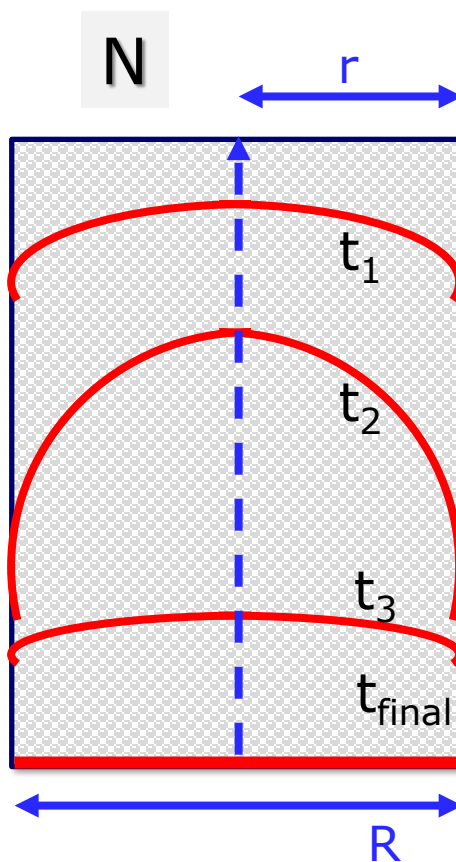
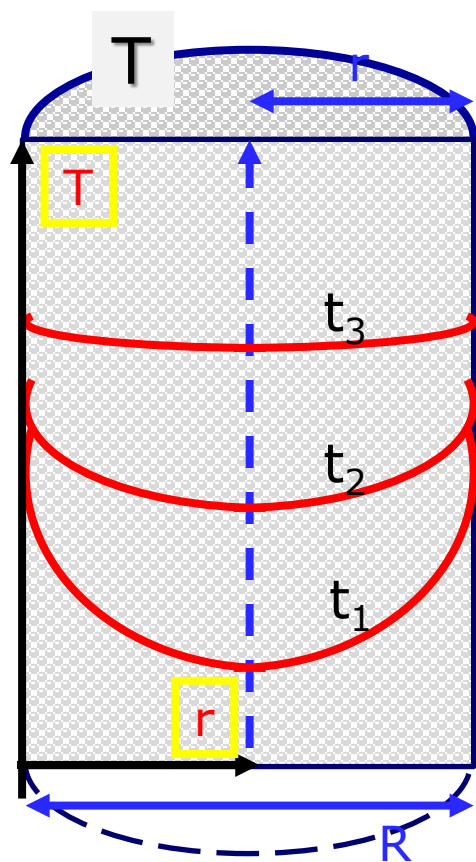
$$\theta = \frac{T}{T_r}$$

matematični model
s raspodijeljenim (distribuiranim) veličinama stanja






matematični model
s raspodijeljenim (distribuiranim) veličinama stanja



Diskretizacija distribuiranih modela

- u inženjerskim zadacima često je potrebno rješavati **obične i parcijalne diferencijalne jednačbe** da bismo odredili vrijednosti nepoznatih varijabli ili funkcija
- distribuirani modeli (parcijalne dif. jednačbe) **postaju rješivi tek nakon postupka diskretizacije bilanci** (jednačbi) po prostoru i vremenu
- **rezultat diskretizacije bilanci su algebarske jednačbe**
- numeričke metode se razlikuju po načinu diskretizacije prostora i po načinu kreiranja sustava algebarskih jednačbi

- kod stacionarnih stanja distribuiranih modela **jednadžbe se rješavaju za odabrani korak** (interval, pomak u prostoru)
- kod nestacionarnih stanja **provodi se diskretizacija po prostoru i po vremenu** pa koristimo i prostorni i vremenski interval (prostor se podijeli vodoravno i okomito, a računanje se obično vrši u čvorovima mreže nastale dijeljenjem prostora)
- **zbog numeričke diskretizacije** jednadžbi/bilanci, **rješenja** dinamičkih jednadžbi mogu biti **samo aproksimativna ili približno točna**, ali ne i apsolutno točna
- **kod diskretizacije modela najčešće se prostor podijeli na male cjeline** (npr. djeliće volumena = **diskretizacija prostora**)
- u ovim malim djelićima volumena **promjene smatramo linearnim**

- 
- diskretizacija u distribuiranim modelima provodi se primjenom Euler-ove metode, Taylor-ovog reda, metode konačnih razlika, metode konačnih elemenata, metode linija (ortogonalnih kolokacija) ili dr.
 - Eulerova metoda u praktičnoj primjeni daje rezultate s velikim pogreškama. Zato se u simulacijama često koriste točnije metode diskretizacije (npr. Runge-Kutta 2 i 4).
 - rješenja dobivena numeričkim postupkom (izračunavanjem) razlikuju se od egzaktnih analitičkih rješenja
 - **analitička rješenja (izmjerene vrijednosti) smatramo točnim (egzaktnim) vrijednostima**

- metoda konačnih razlika u parcijalnoj diferencijalnoj jednažbi zamjenjuje derivacije nizom aproksimacija
- aproksimacija prve derivacije:

$$f(x + \Delta x) \cong f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$$

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$$

jednostrana (s desne strane)
aproksimacija prve derivacije

- aproksimacija druge derivacije:

$$f(x \oplus \Delta x) \cong f(x) + f'(x) \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \cdot f''(x) \cdot \Delta x^2$$

$$f(x \ominus \Delta x) \cong f(x) - f'(x) \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \cdot f''(x) \cdot \Delta x^2$$

Zbrojimo oba izraza

$$f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) \cong 2 \cdot f(x) + f''(x) \cdot \Delta x^2$$

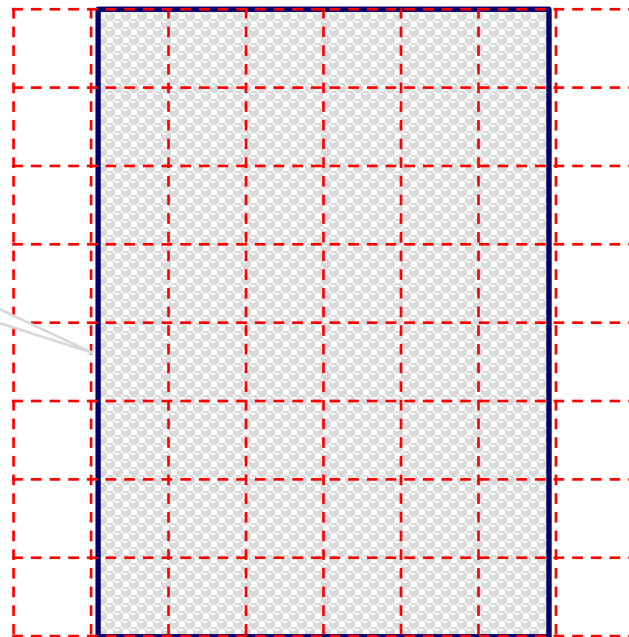
Izračunamo drugu derivaciju

$$f''(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2 \cdot f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2}$$

$$f''_i = \frac{f_{i+1} - 2 \cdot f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2}$$

- prvi korak u diskretizaciji je podjela modeliranog prostora pravilnom mrežom na niz podpodručja
- razmaci mreže u x (Δx) i y (Δy) smjeru mogu varirati
- da bi jednadžbe bile jednostavnije u primjerima pretpostavljamo da je mreža ekvidistantna ($\Delta x = \Delta y \rightarrow$ jednaka je skala razmaka po x i y osi)

limenka



- da bi se mogao napisati sustav jednažbi za sve čvorove u mreži potrebno je provesti numeraciju koja se može provesti na dva načina:
 - po redovima i kolonama (kao u MS Excel tablici) ili
 - numeracija svih čvorova u mreži od prvog do posljednjeg

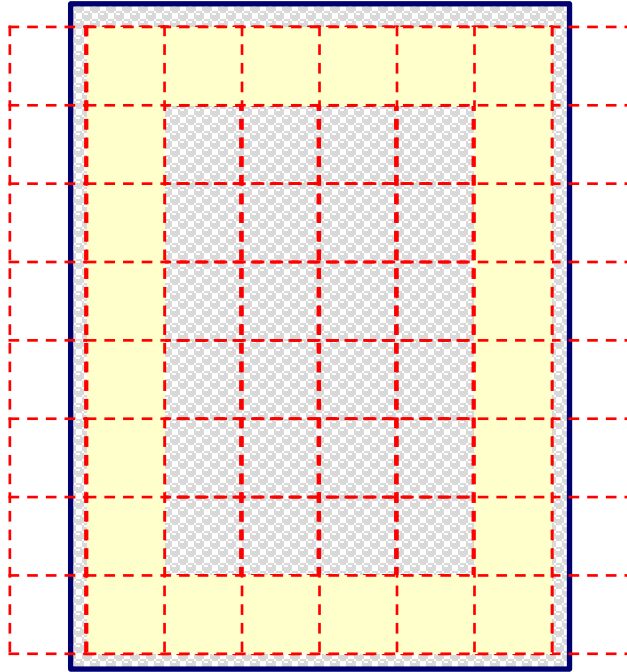
11	12	13
21	22	23
31	32	33

1	2	3
4	5	6
7	8	9

- čvorovi koji predstavljaju rub modeliranog područja zahtijevaju informacije o rubnim uvjetima

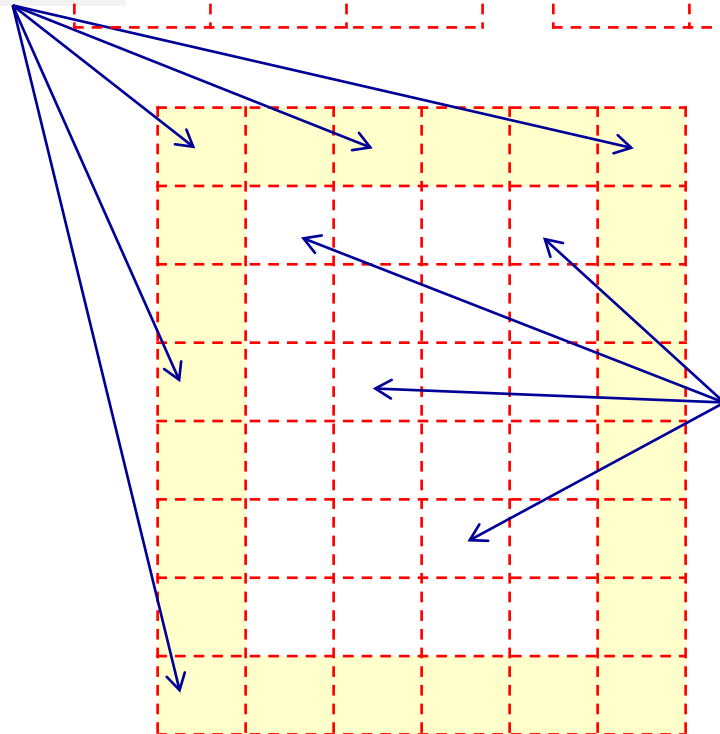
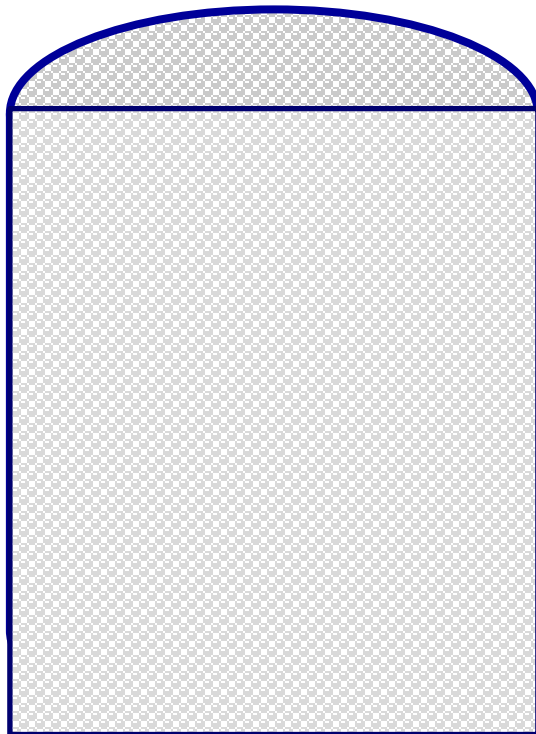
Početni i rubni uvjeti

- **jednadžba provođenja topline može imati beskonačno mnogo rješenja jer je u svakom djeliću volumena drugačija vrijednost temperature**
- zbog toga se uvode početni i rubni uvjeti
- **početni uvjeti** predstavljaju vrijednosti veličina stanja na početku procesa u vremenu $t=0$ (T_0 , N_0 i C_0)
- **rubni ili granični uvjeti** predstavljaju vrijednosti na rubnim površinama krutine i njezine okoline (T_{\max} , C_{\min})



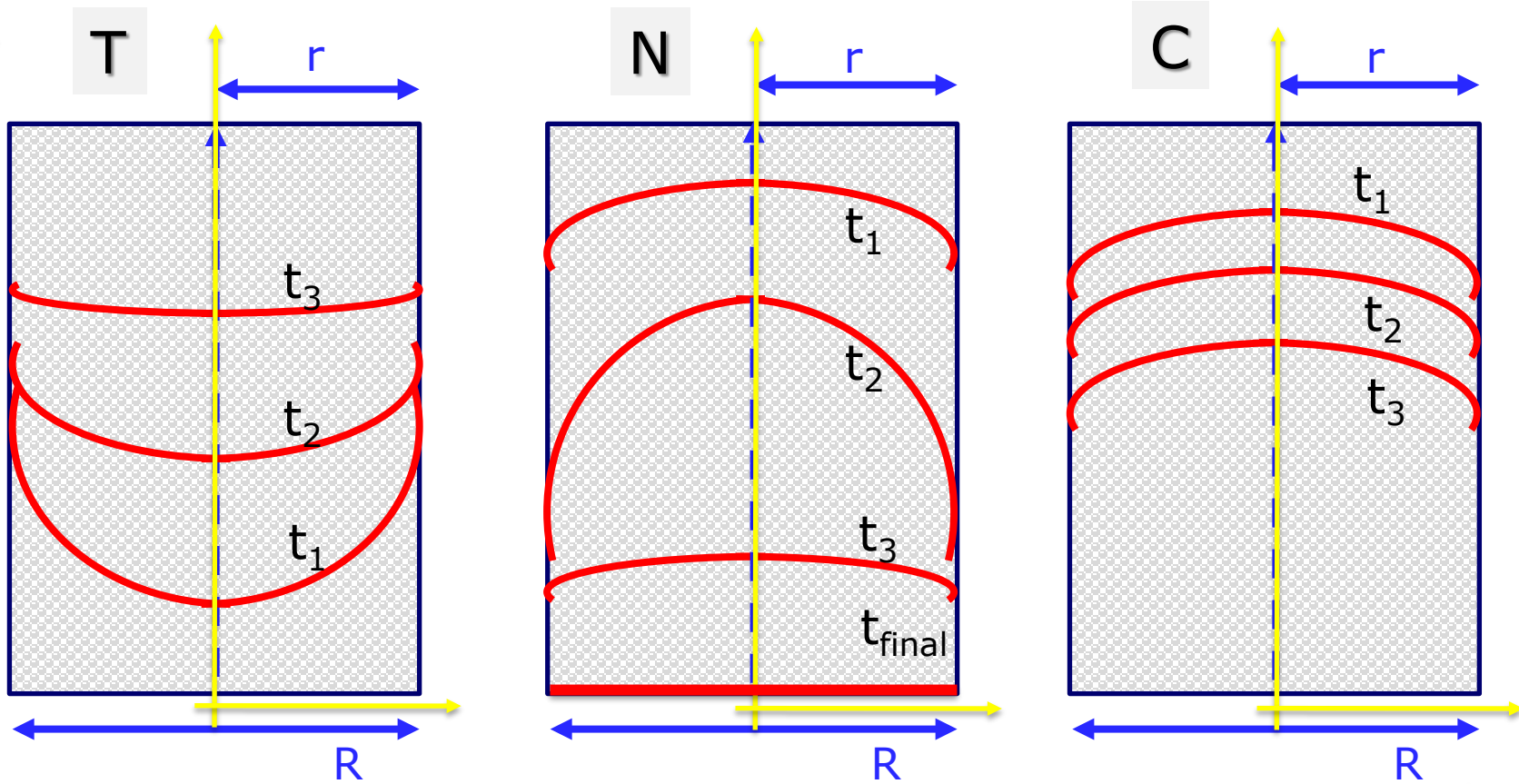
diskretizacija bilanci po volumenu
(t =vrijeme izračunavanja)
(r =položaj djelića volumena)

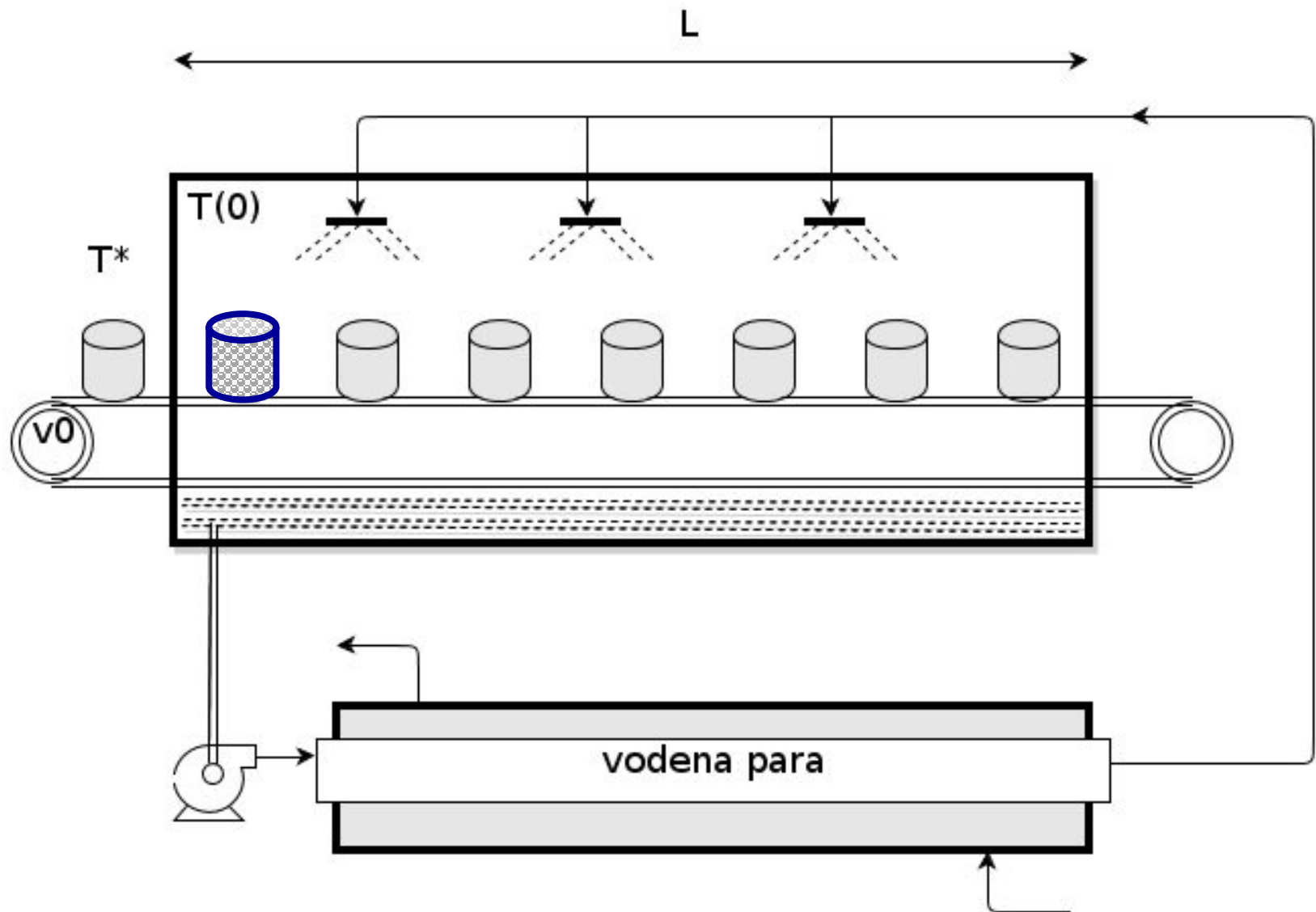
T_0	11	12	13	1	2	3
N_0	21	22	23	4	5	6
C_0	31	32	33	7	8	9

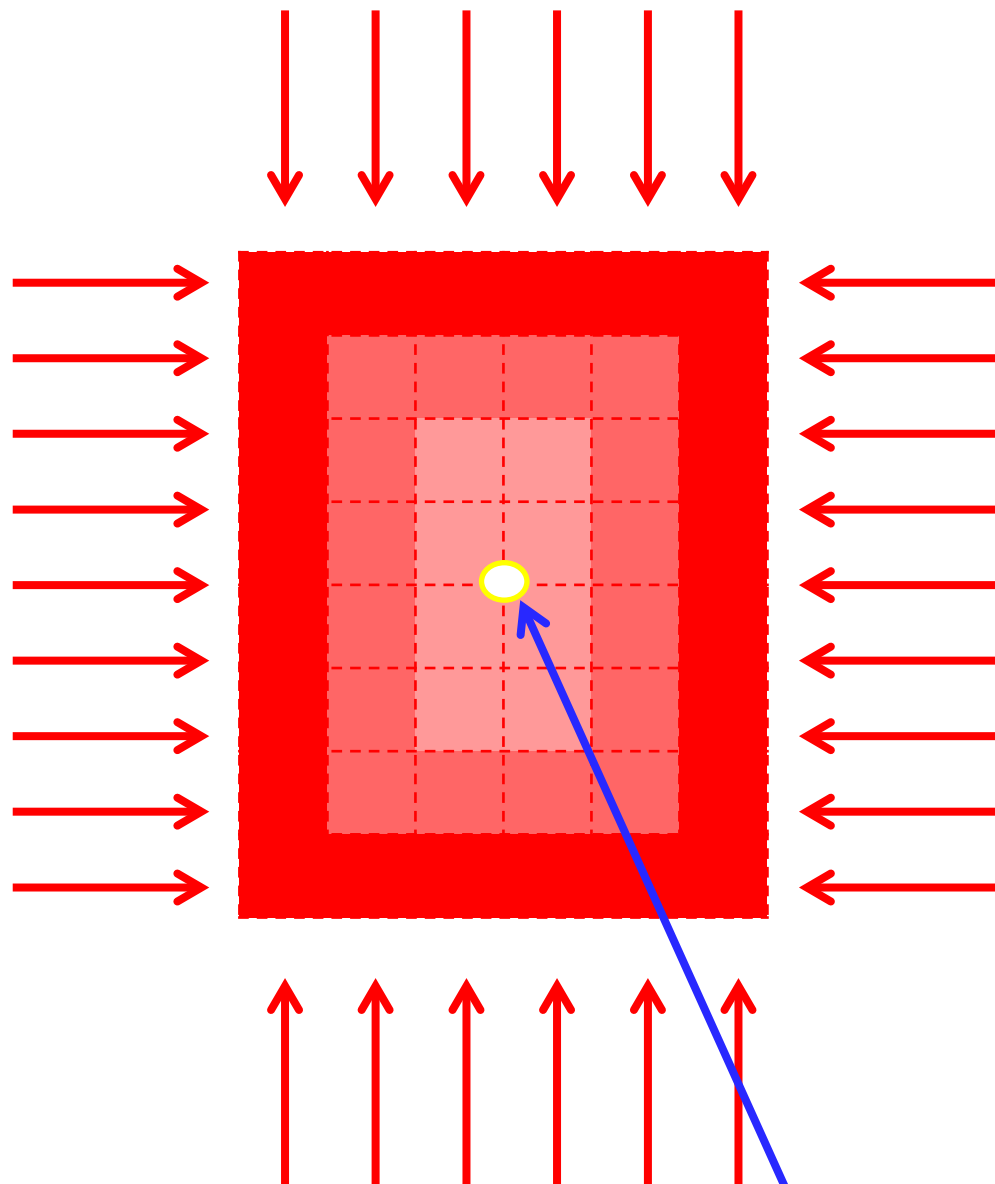
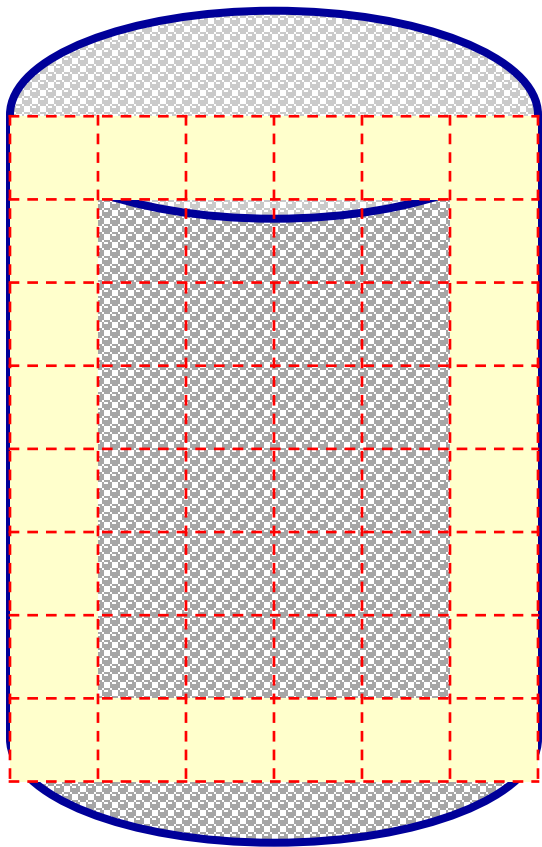


$T(t,r)$
 $N(t,r)$
 $C(t,r)$

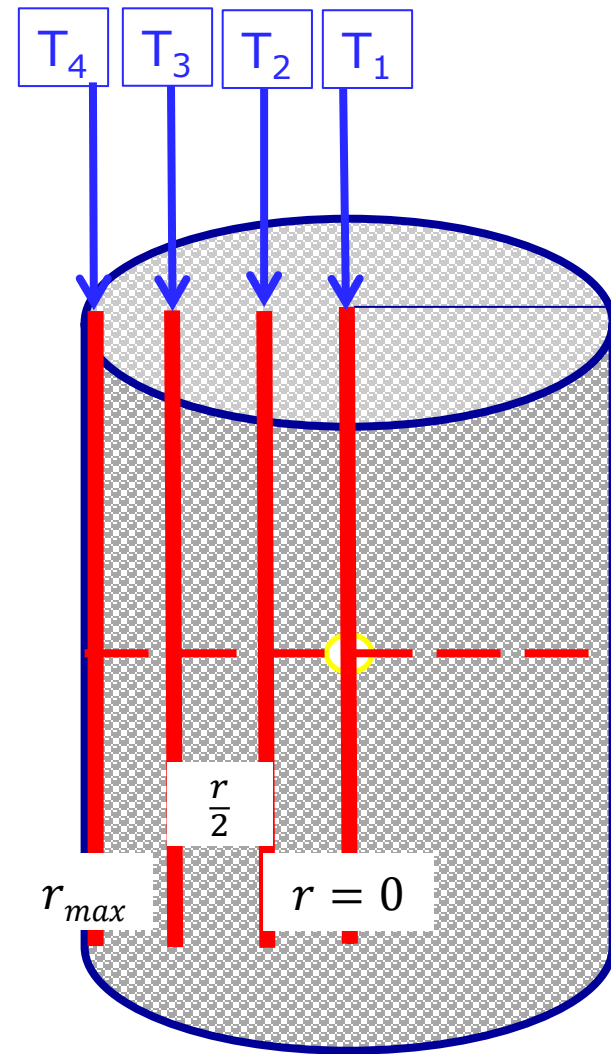
matematični model s distribuiranim veličinama stanja







Sterilizacija je provedena kada je zadovoljen uvjet: **$N(t_f, r_c) = 0$**



- odredite vrijeme t_f potrebno za provedbu sterilizacije pri zadanim početnim vrijednostima T_0 , N_0 , C_0
- odredite temperaturu T_f u konzervi nakon t_f sekundi



4.1. Modeli dinamičkih stanja sustava

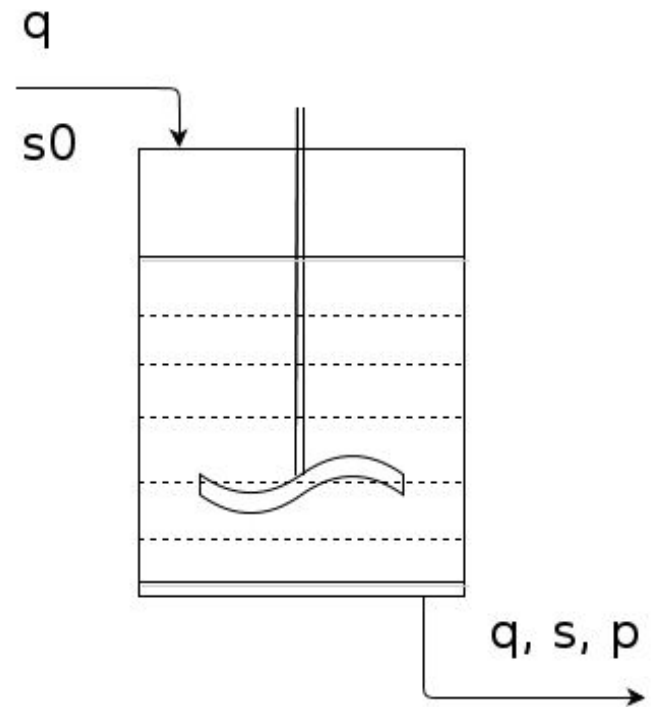
Model zamrzavanja namirnica

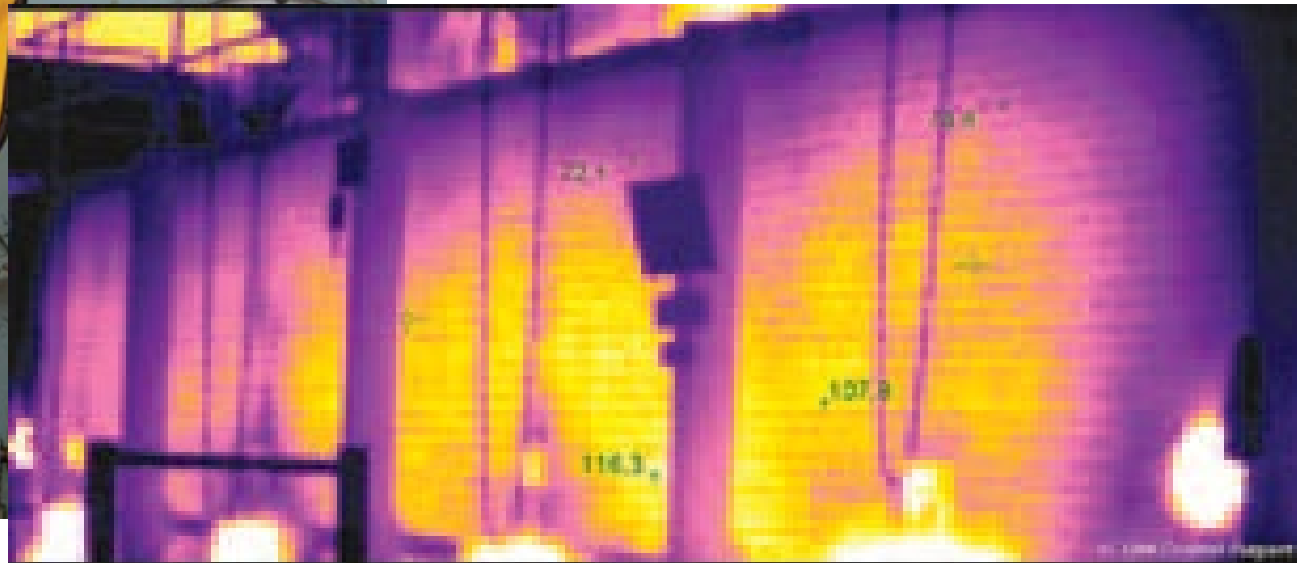
Eulerova metoda za rješavanje diferencijalnih jednažbi

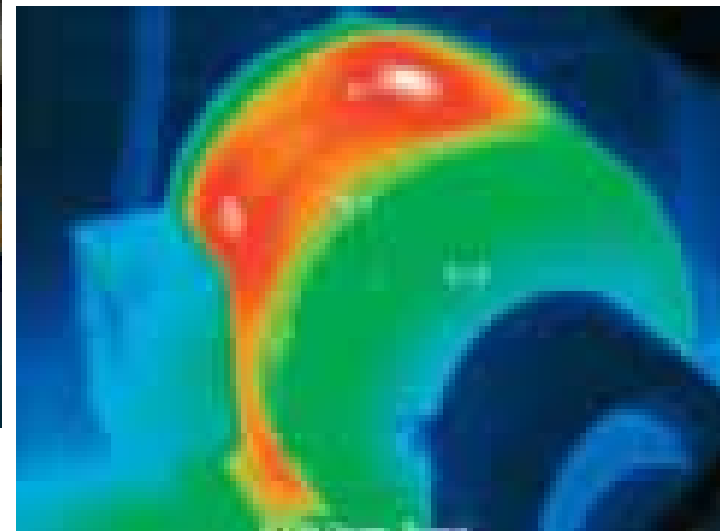
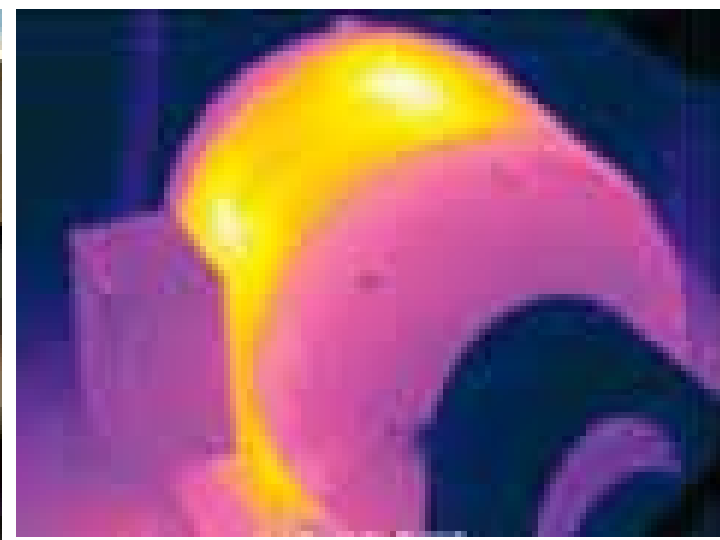
Oprema za mjerenja u termičkim procesima i modeliranje

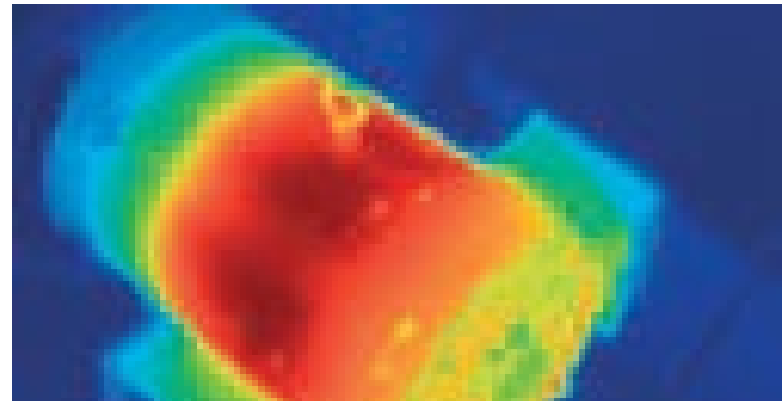
Model sterilizacije namirnica

Model upravljanja biokemijskim reaktorom









Software interface for a thermal camera. The window title is "LIFE 6800000122_0000". The menu bar includes "File", "Display", "Measure", "Focus", "Annotations", and "Reference Image...".

Temperature Scale: A vertical scale on the left shows a range from -20.0 °C (dark blue) to 200.0 °C (dark red). A secondary scale on the right shows a range from 0.0 to 21.6. Below the scales are three small icons representing different color palettes.

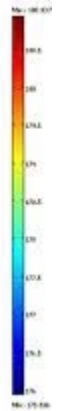
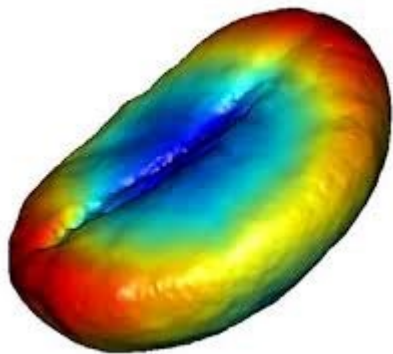
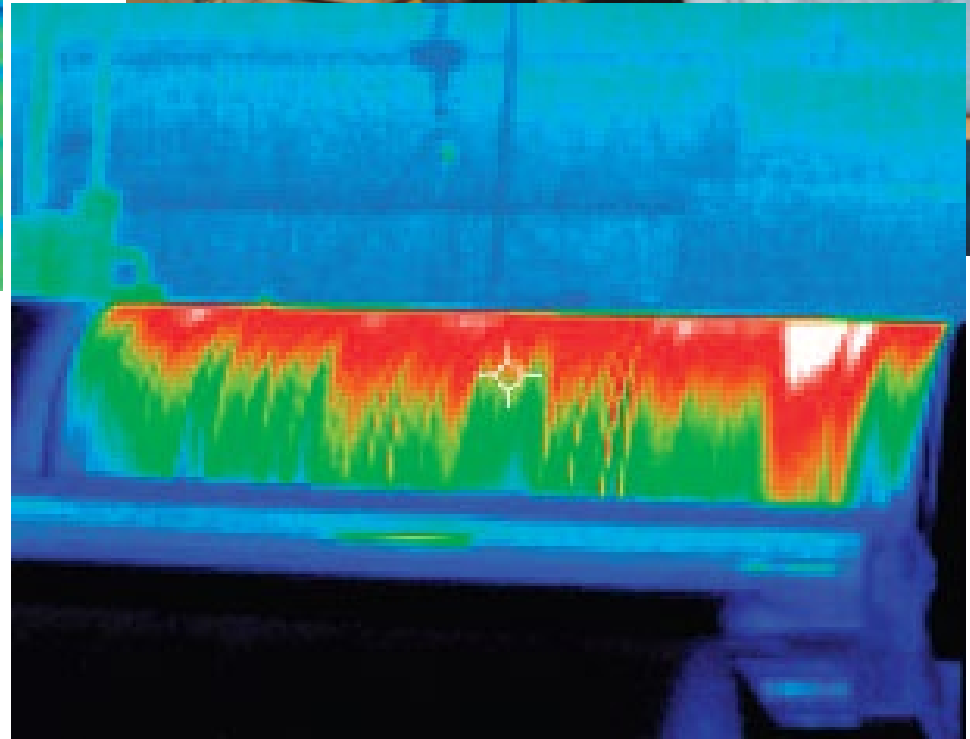
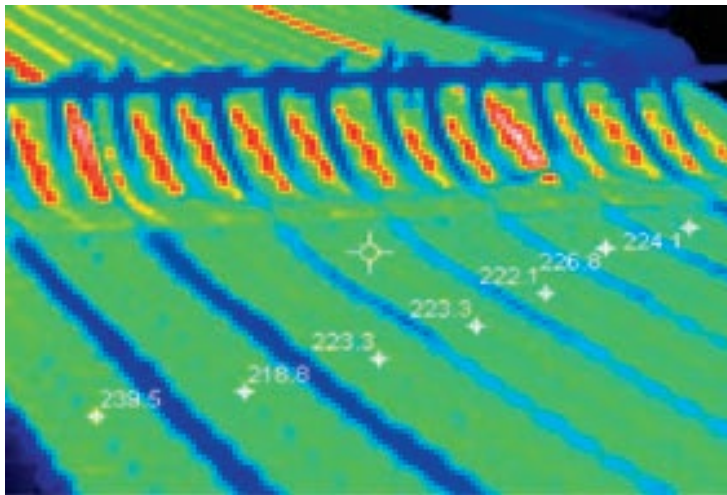
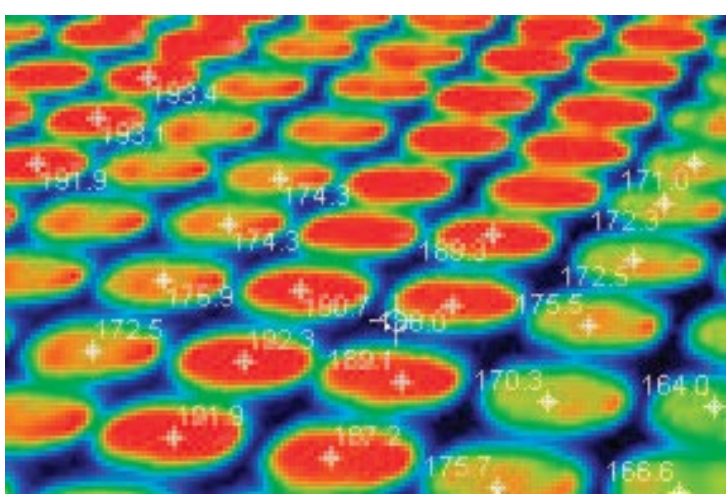
Display Settings: A section labeled "Theme" contains a "Cycle scale" dropdown set to "Full scale", a "Palette color" dropdown set to "Blue Red", and a "Simulation colors" dropdown set to "Standard".

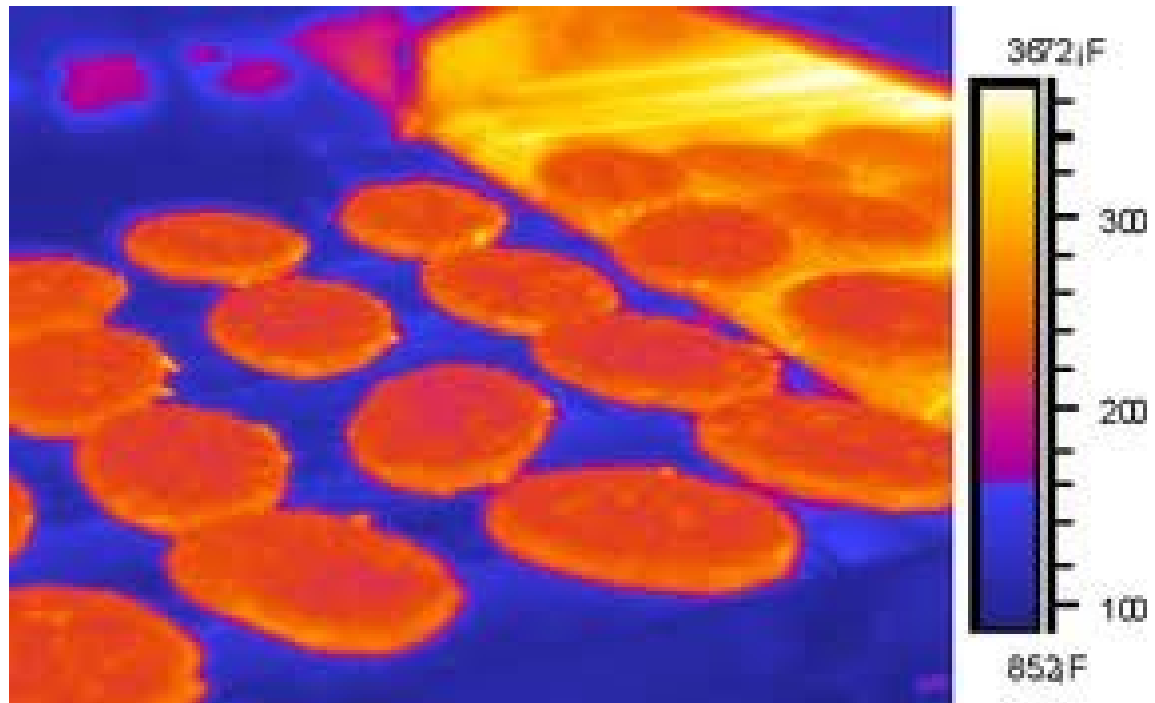
Main View: A large window displays a thermal image of a curved object, overlaid on a grayscale background image of the same object in an industrial setting. The thermal image shows a color gradient from blue to red.

Image Info / Measure / Metric Data: A table at the bottom right provides technical details:

File location	H:\images\Thermography\0216_photos\PL1
Image Time	3-22-2016 8:43:13 AM
Exposure	0.01
Background	20.0 °C
Image Range	32.9 °C to 118 °C
Average Temp	43.8 °C
Model	FLiRF320
Manufacturer	Infrared Solutions
Calibration R	-20.0 °C to 300.0 °C
Camera S/N	FLiRF320 0.24
Lens Model	25mm FT8
Lens S/N	42540-2681

Buttons for "OK", "Cancel", "Help", and "Full Visible" are located at the bottom of the interface.





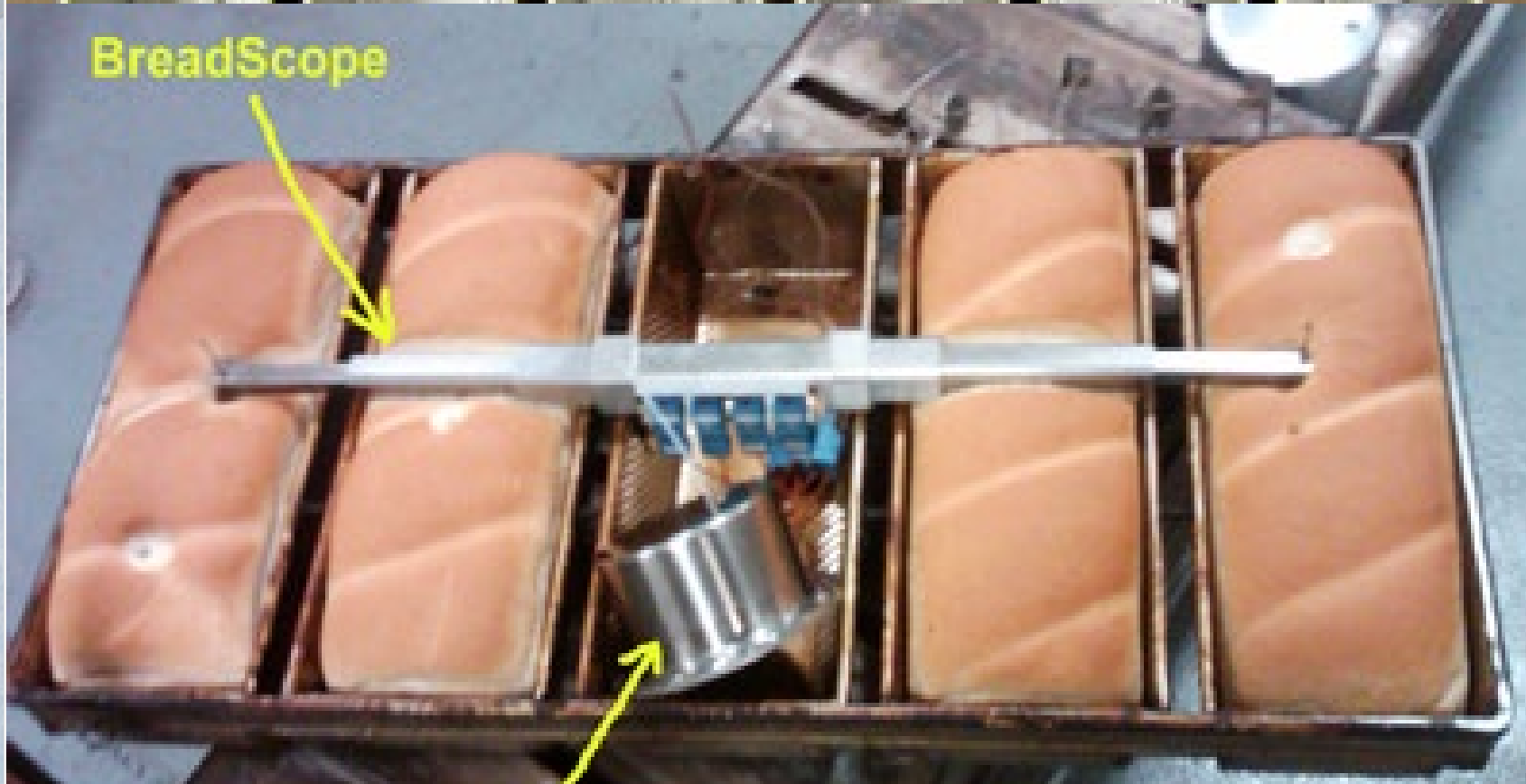


on-line infrared moisture analyzer

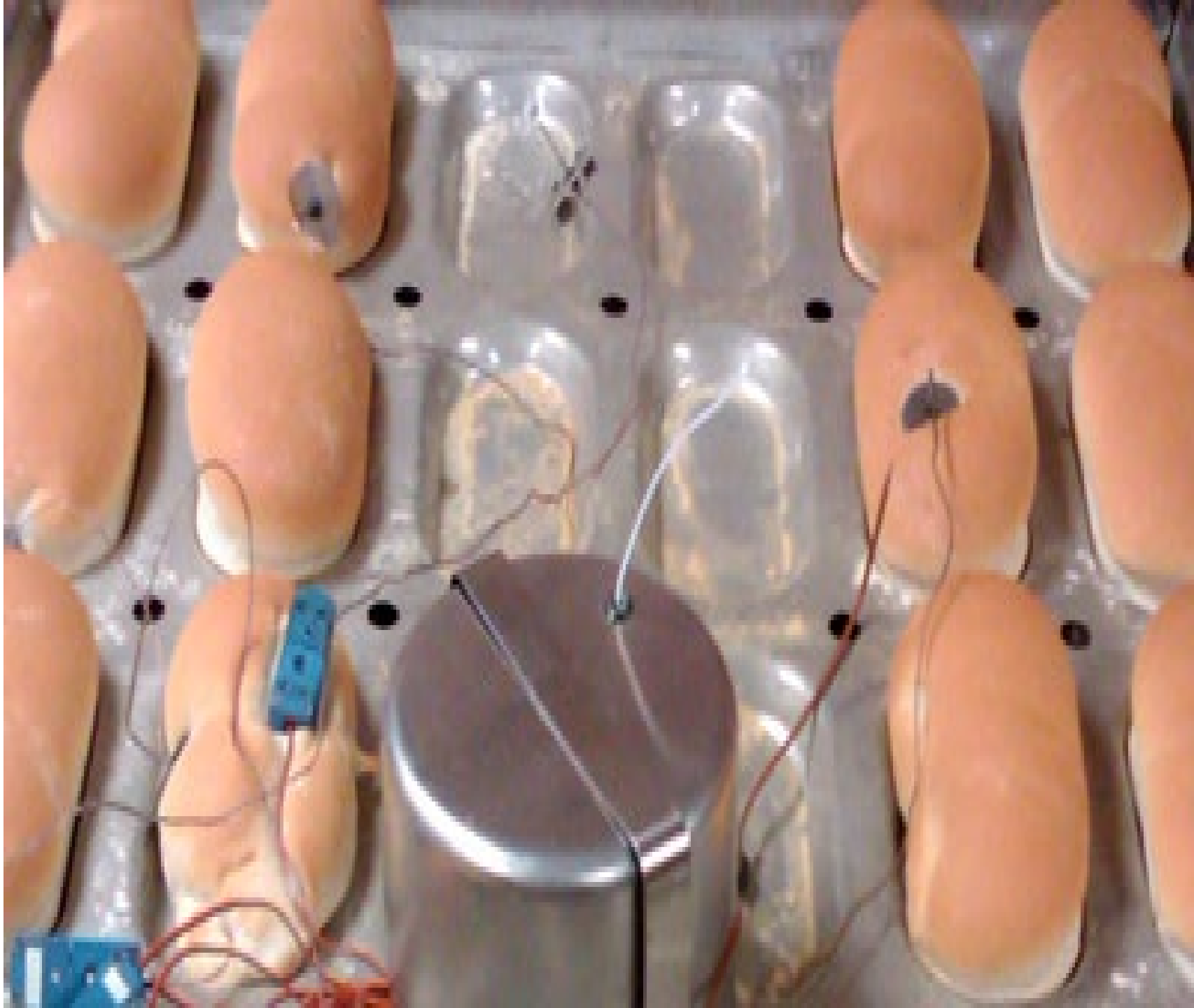




BreadScope



ThermoBiscuit





GateWay™





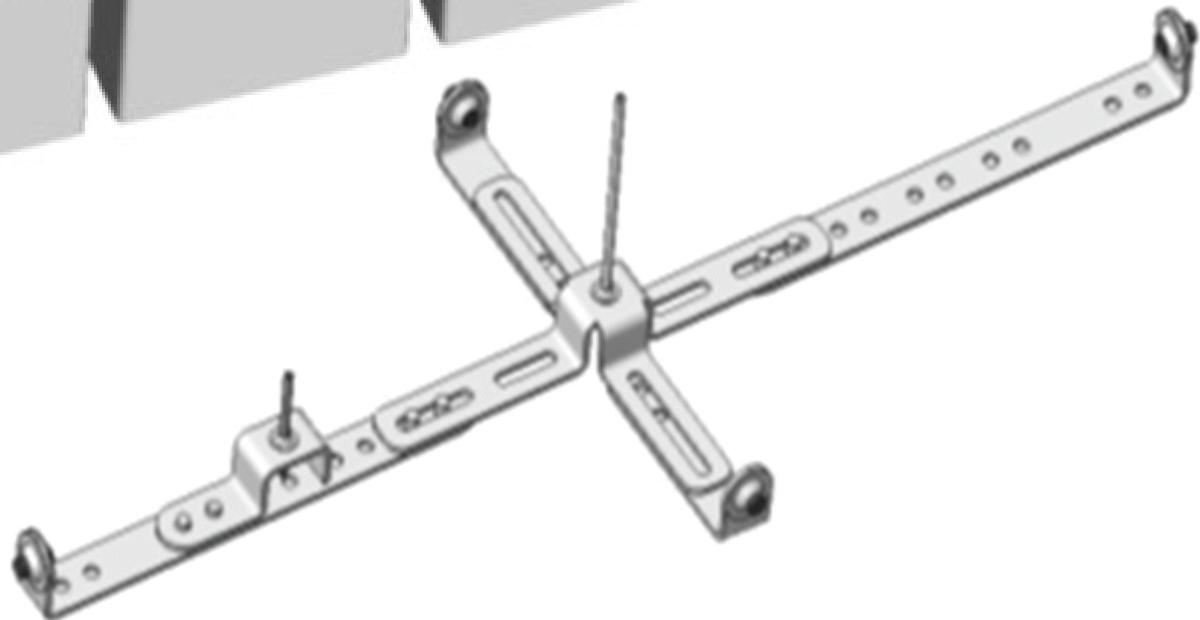
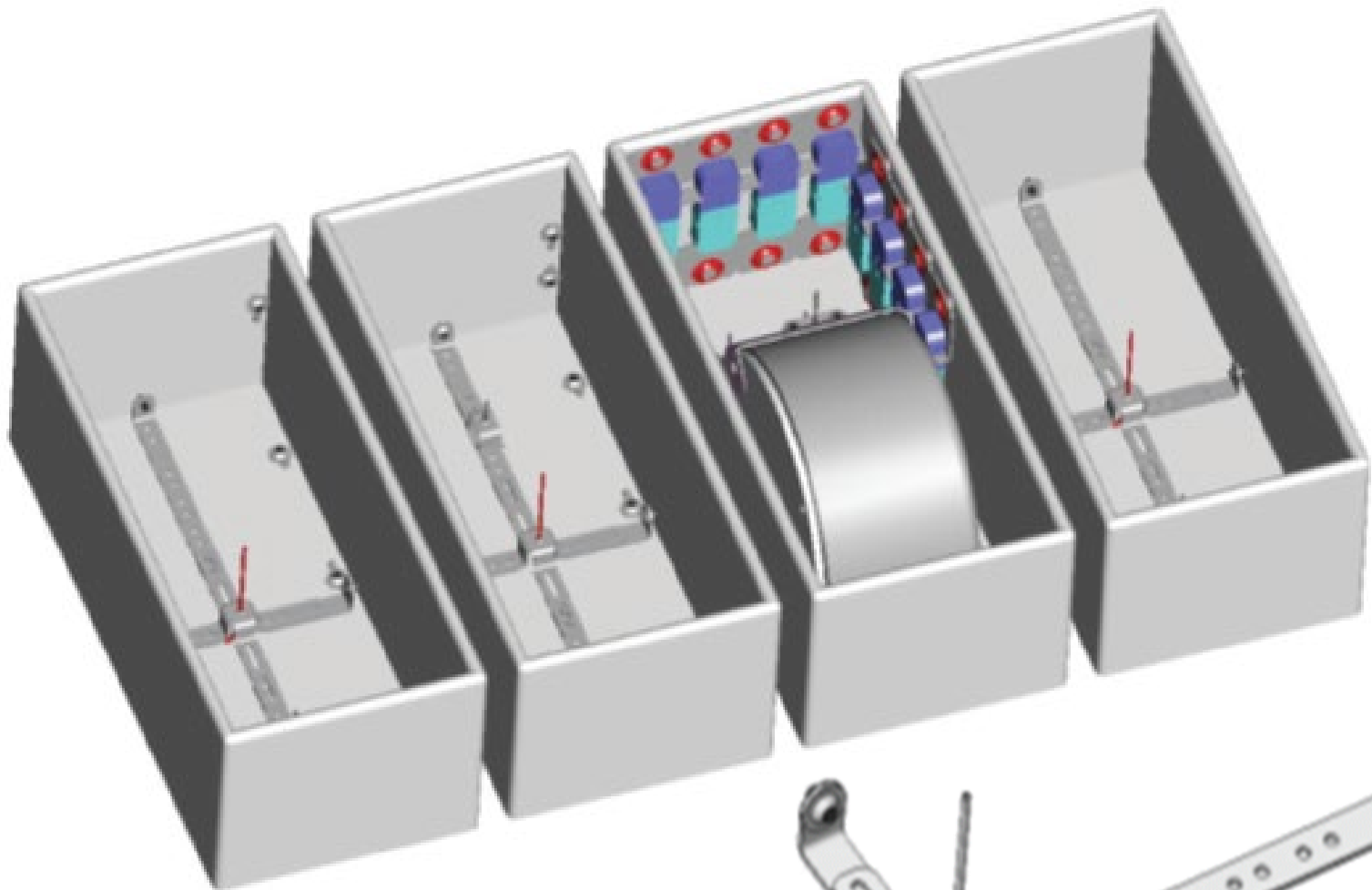
TC-Bridge™ Deployed Configuration



Ring Lug

Standard





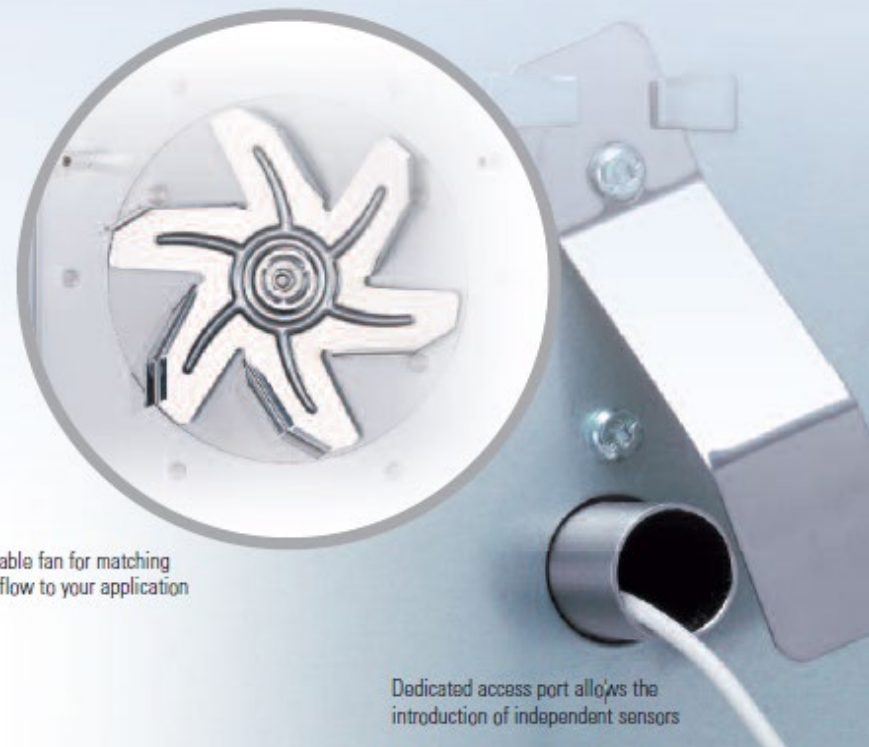


Standard RS232 interface on all units

Fresh Air Damper provides control over air exchanges



Operating up to 250 °C



Adjustable fan for matching the airflow to your application

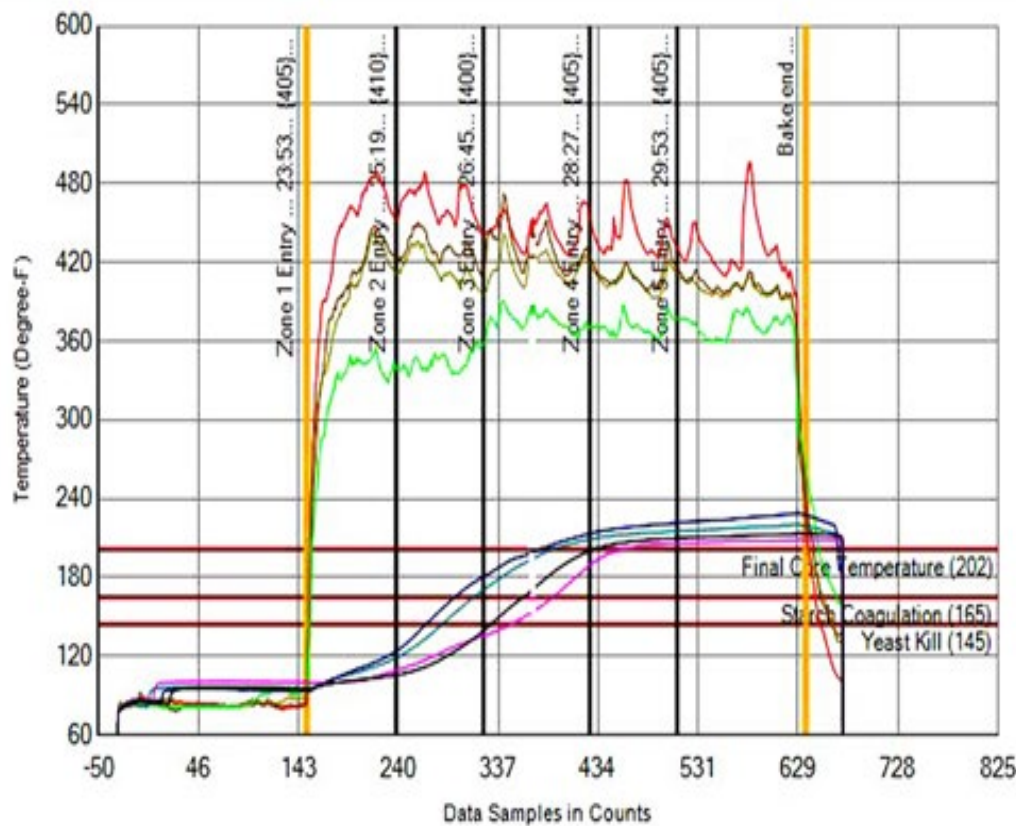
Dedicated access port allows the introduction of independent sensors

Save Print

Report Title

Average Oven Air Temperatures at Channel 1 are

1 427.0 2 464.3 3 444.7 4 441.0 5 434.5 6 ### 7 ### 8 ### 9 ### 10 ###



— Ch1 — Ch2 — Ch3 — Ch4 — Ch5 — Ch6 — Ch7 — Ch8

Report Description

Hot Dog Bun Baking

Average Bake Temperature is 438.5

Data Channels

- Ch1
- Ch2
- Ch3
- Ch4
- Ch5
- Ch6
- Ch7
- Ch8

Baking Profile

Bake started at
2010-10-20T10:23:53

Total bake time
00:08:05 (Hr.Min:Sec)

Channel Channel

Yeast kill at 145
 % %

Starch coagulation at 165
 % %

Module No is 1

Units are Degree-F

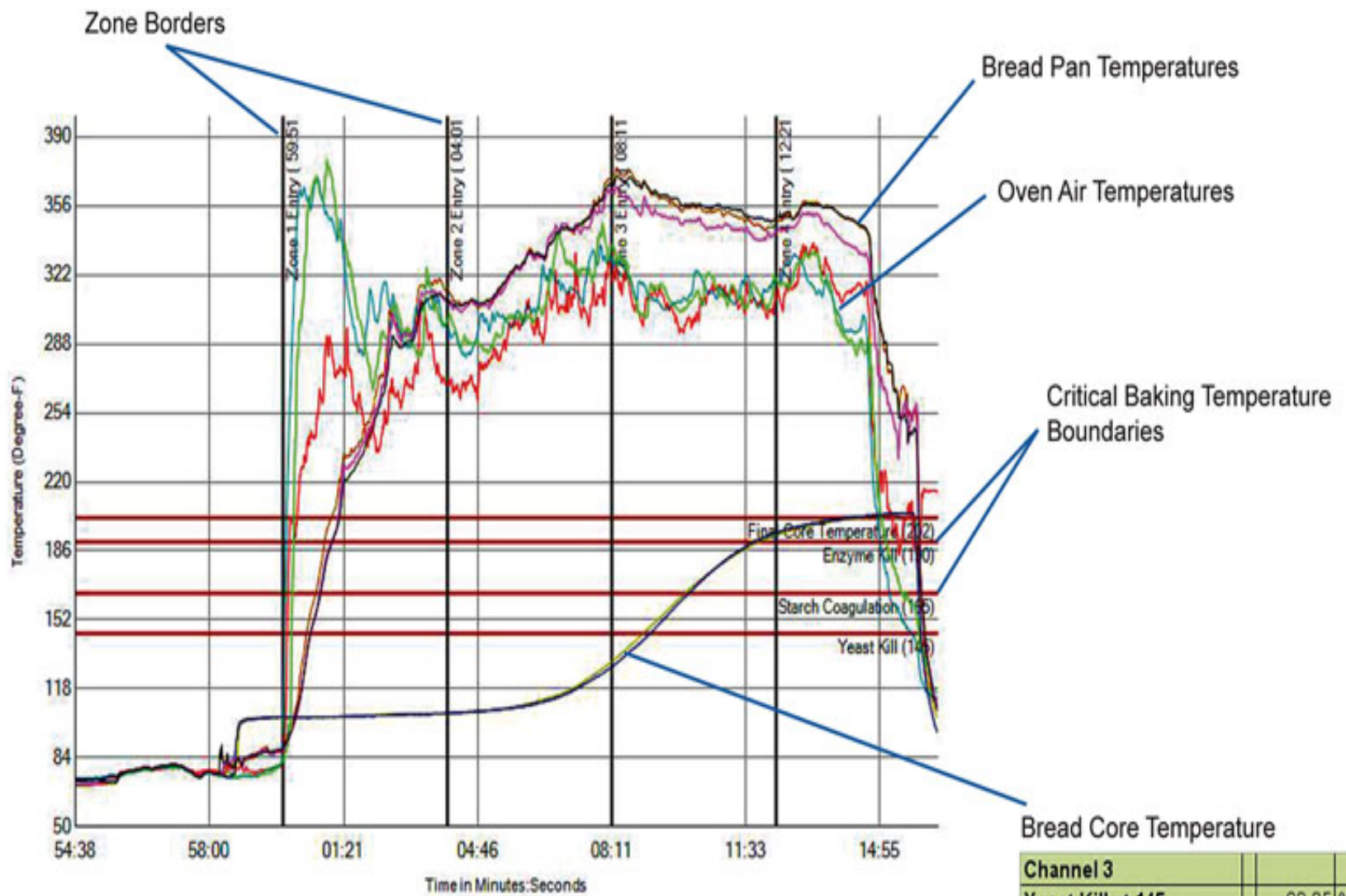
Core temperature at 202
 % %

Ave Zone T

Ave Bake T

Show 3D

Close



— Ch1 — Ch2 — Ch3 — Ch4 — Ch5 — Ch6 — Ch7 — Ch8

Bread Core Temperature

Channel 3		
Yeast Kill at 145	66.05	%
Starch Coag. at 165	70.97	%
Enzyme Kill at 190	79.34	%
Final Core Temp. at 202	13.21	%
Channel 6		
Yeast Kill at 145	66.82	%
Starch Coag. at 165	71.43	%
Enzyme Kill at 190	78.88	%
Final Core Temp. at 202	13.9	%

Optimize Your Process with Thermal Profiling

Save Print

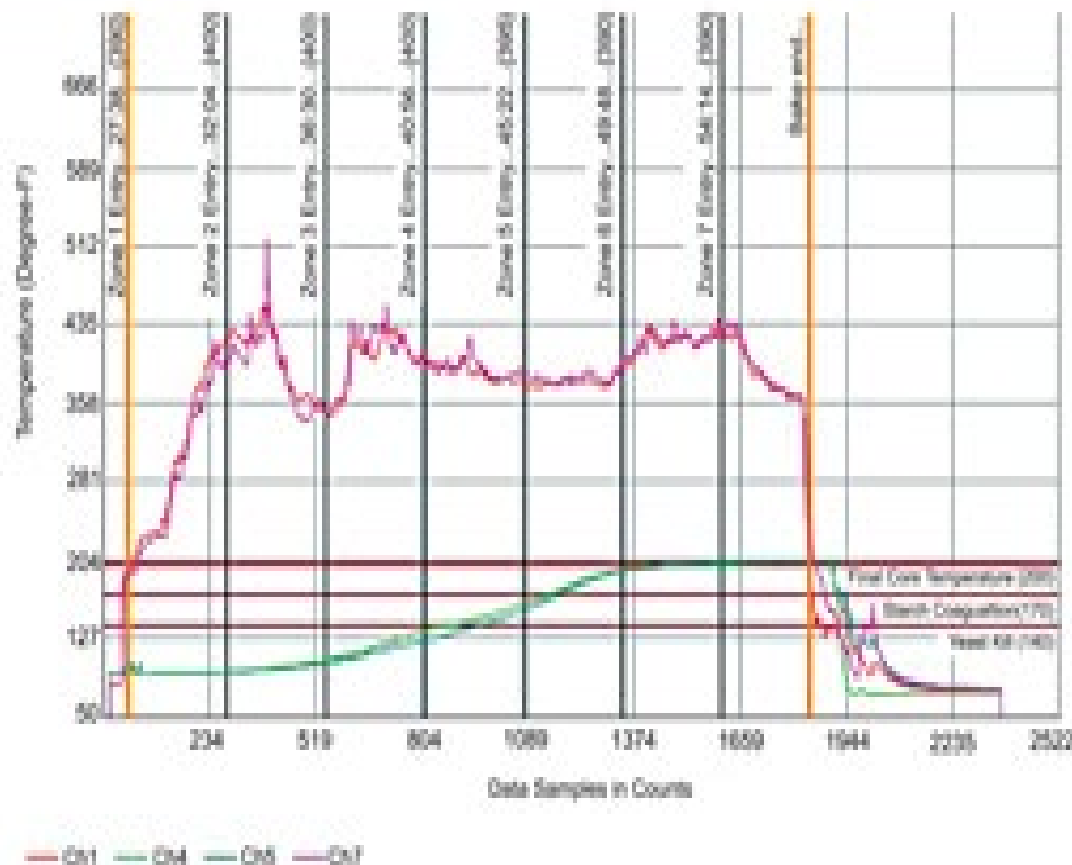
Report Title

Average Oven Air Temperatures at Channel 1 are

1 303.8 2 398.1 3 400.1 4 384.2 5 377.7 6 416.2 7 365.4 8 888 9 888 10 888

Report Description

Facility Name:
Oven Name:



Average Bake Temperature is 381.7

Date Channels	Baking Profile
	Bake Started at: 2010-06-24T 09:27:08
<input checked="" type="checkbox"/> Ch1	Total Bake Time: 00:30:28 (4 Minutes)
<input type="checkbox"/> Ch2	Channel <input type="text" value="4"/> Channel <input type="text" value="5"/>
<input checked="" type="checkbox"/> Ch4	Yeast Kill at 145: 46.12 % 81.75 %
<input type="checkbox"/> Ch5	Starch Coagulation at 175: 81.75 % 81.53 %
<input type="checkbox"/> Ch6	Core temperature at 200: 15.87 % 15.86 %
<input checked="" type="checkbox"/> Ch7	
<input type="checkbox"/> Ch8	

Module No is 1

Temperature unit is Degree F

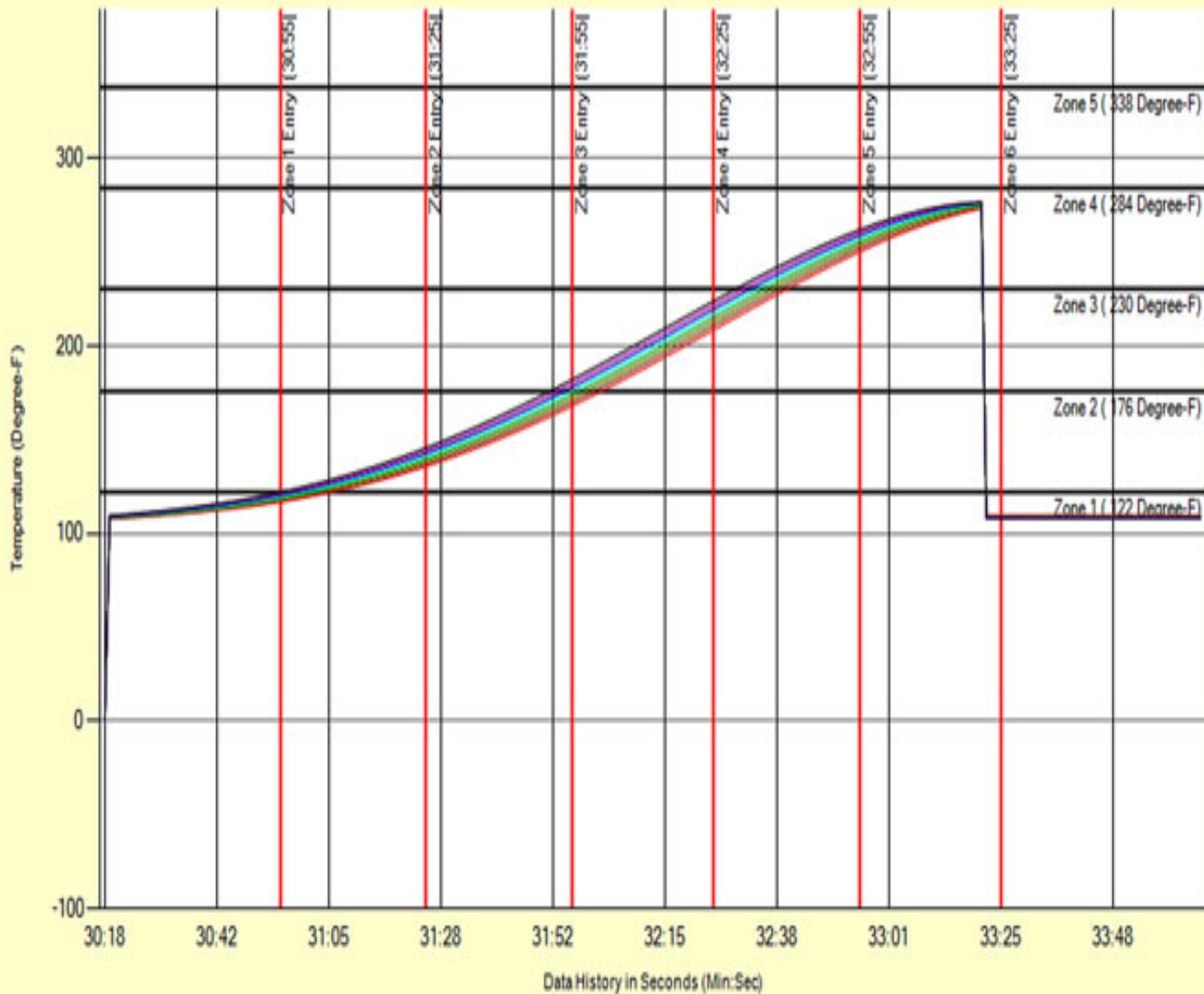
View Zone 1

View Bake 1

Zone 6 Please wait for the baking curve to complete.

Channel Temperature (Degree-F)

- A 109.40
- B 109.24
- C 109.07
- D 108.91
- E 108.74
- F 108.58
- G 108.41
- H 108.25



- Ch. A- Ch. 1 of Node 3088
- Ch. C- Ch. 3 of Node 3088
- Ch. E- Ch. 5 of Node 3088
- Ch. G- Ch. 7 of Node 3088
- Ch. H- Ch. 8 of Node 3088
- Ch. B- Ch. 2 of Node 3088
- Ch. D- Ch. 4 of Node 3088
- Ch. F- Ch. 6 of Node 3088

Test Control

Start Test Stop Test Cancel Test Close

Sensor Reading

Node S/N: 6055

Channel	Temperature (Degree C)	Channel	Temperature (Degree C)
1	24.99	5	24.92
2	25.06	6	24.99
3	25.01	7	24.96
4	24.88	8	25.01

Test Status

Test is in process. Receive data from 2 Node(s). Test will end at 11:31:57 AM, Jun 21 2007

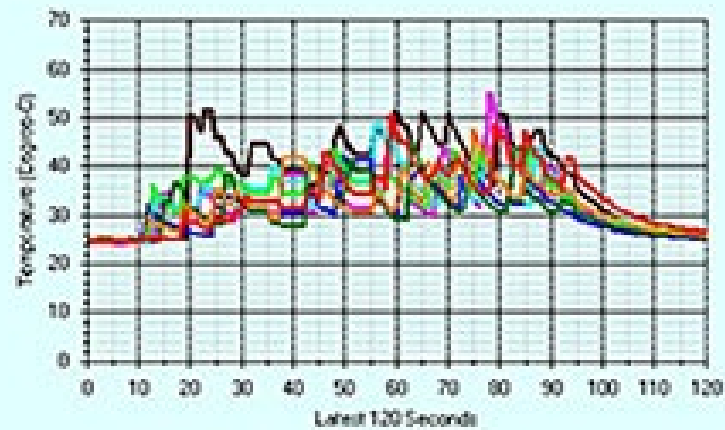
Test start time is 11:21:57 AM, Jun 21, 2007

Network time is 11:27:48 AM, Jun 21 2007

ThermoSpyder Node 6058

Print

Channel	Temperature (Degree-C)
<input checked="" type="checkbox"/> 1	25.64
<input checked="" type="checkbox"/> 2	25.81
<input checked="" type="checkbox"/> 3	25.47
<input checked="" type="checkbox"/> 4	26.07
<input checked="" type="checkbox"/> 5	25.17
<input checked="" type="checkbox"/> 6	25.23
<input checked="" type="checkbox"/> 7	25.25
<input checked="" type="checkbox"/> 8	25.21



Test Control

Start Test Stop Test Cancel Test Close

Sensor Reading

Node S/N: 6055

Channel	Temperature (Degree-C)	Channel	Temperature (Degree-C)
1	24.60	5	24.69
2	25.24	6	25.28
3	24.63	7	25.37
4	25.37	8	24.60

Test Status

Test is in process. Receive data from 3 Node(s). Test will end at 03:03:13 PM, Jun 21 2007

Test start time is 02:53:13 PM, Jun 21, 2007

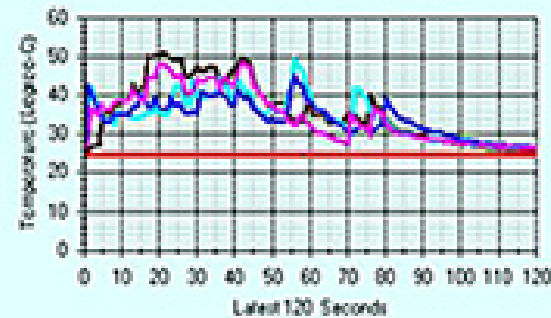
Network time is 02:55:03 PM, Jun 21 2007

Chart 1

Print Scale

Temperature (Degree-C) Average

<input checked="" type="checkbox"/> A	24.57	24.59	
<input checked="" type="checkbox"/> B	24.68	24.62	
<input checked="" type="checkbox"/> C	24.54	24.51	
<input checked="" type="checkbox"/> D	24.46	24.45	
<input checked="" type="checkbox"/> E	26.17	33.44	
<input checked="" type="checkbox"/> F	26.31	32.87	
<input checked="" type="checkbox"/> G	26.03	33.14	
<input checked="" type="checkbox"/> H	25.28	34.38	
Maximum	50.76	Minimum	24.29



— Ch. A- Ch. 1 of Node 6055

— Ch. C- Ch. 1 of Node 6056

— Ch. E- Part A (Node 6058 Ch 1)

— Ch. G- Inlet A (Node 6058 Ch 5)

— Ch. B- Ch. 3 of Node 6055

— Ch. D- Ch. 4 of Node 6056

— Ch. F- Part B (Node 6058 Ch 2)

— Ch. H- Outlet A (Node 6058 Ch 7)

Test Control

Start Test Stop Test Cancel Test Close

Sensor Reading

Node S/N: 6055

Channel	Temperature (Degree-C)	Channel	Temperature (Degree-C)
1	24.60	5	24.69
2	25.24	6	25.28
3	24.63	7	25.37
4	25.37	8	24.60

Test Status

Test is in process. Receive data from 3 Node(s). Test will end at 03:03:13 PM, Jun 21 2007

Test start time is 02:53:13 PM, Jun 21, 2007

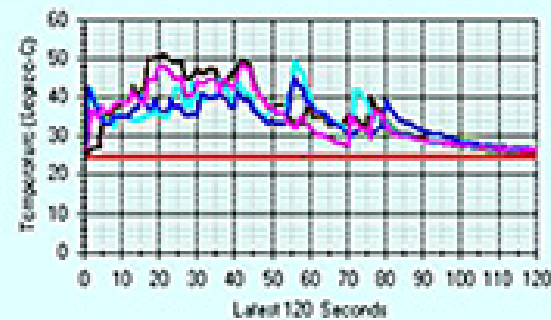
Network time is 02:55:03 PM, Jun 21 2007

Chart 1

Print Scale

Temperature (Degree-C) Average

<input checked="" type="checkbox"/> A	24.57	24.59	
<input checked="" type="checkbox"/> B	24.68	24.62	
<input checked="" type="checkbox"/> C	24.54	24.51	
<input checked="" type="checkbox"/> D	24.46	24.45	
<input checked="" type="checkbox"/> E	26.17	30.44	
<input checked="" type="checkbox"/> F	26.31	32.87	
<input checked="" type="checkbox"/> G	26.03	33.14	
<input checked="" type="checkbox"/> H	25.28	34.38	
Maximum	50.76	Minimum	24.29



Ch. A- Ch. 1 of Node 6055

Ch. C- Ch. 1 of Node 6056

Ch. E- Part A (Node 6058 Ch 1)

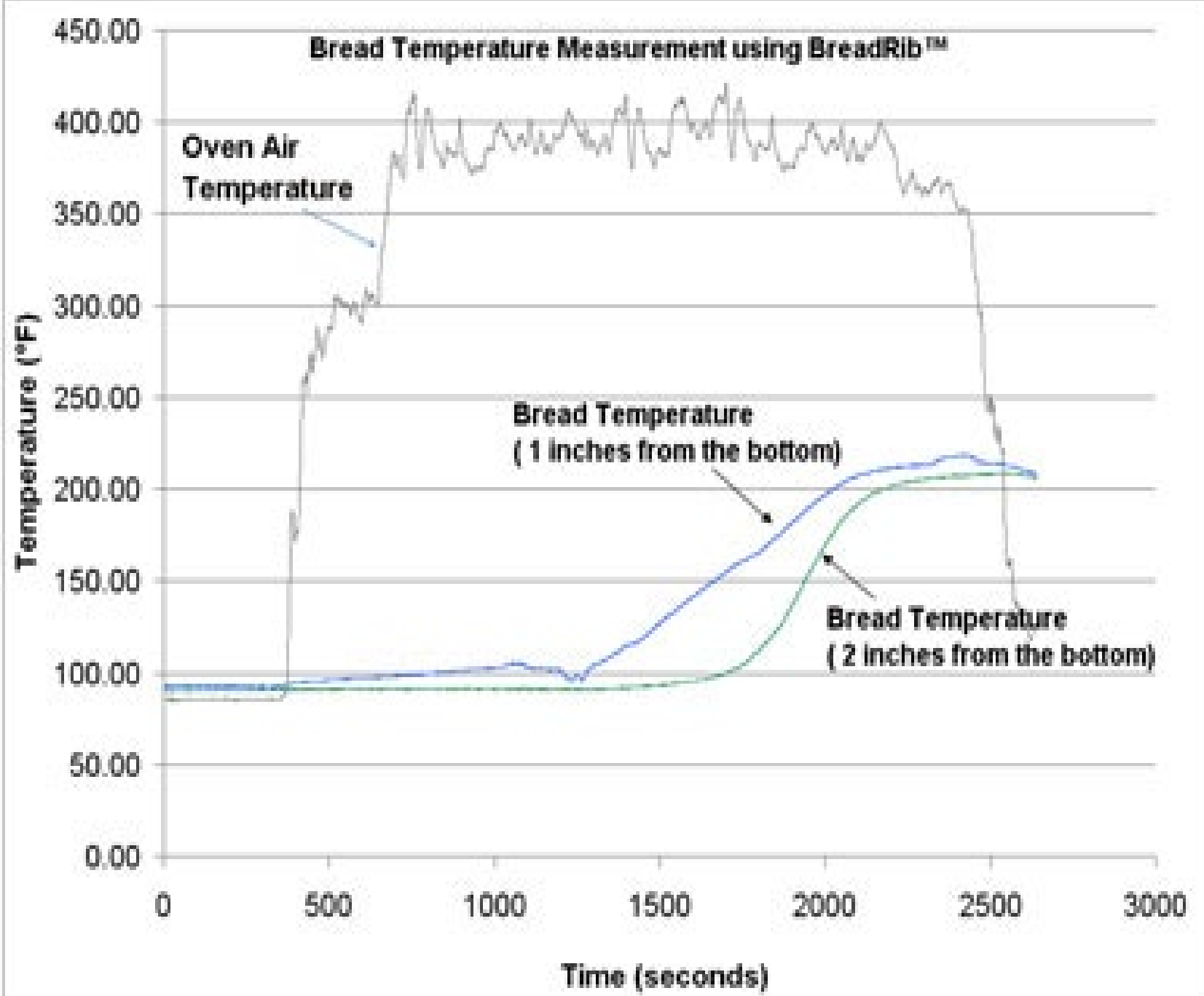
Ch. G- Inlet A (Node 6058 Ch 5)

Ch. B- Ch. 3 of Node 6055

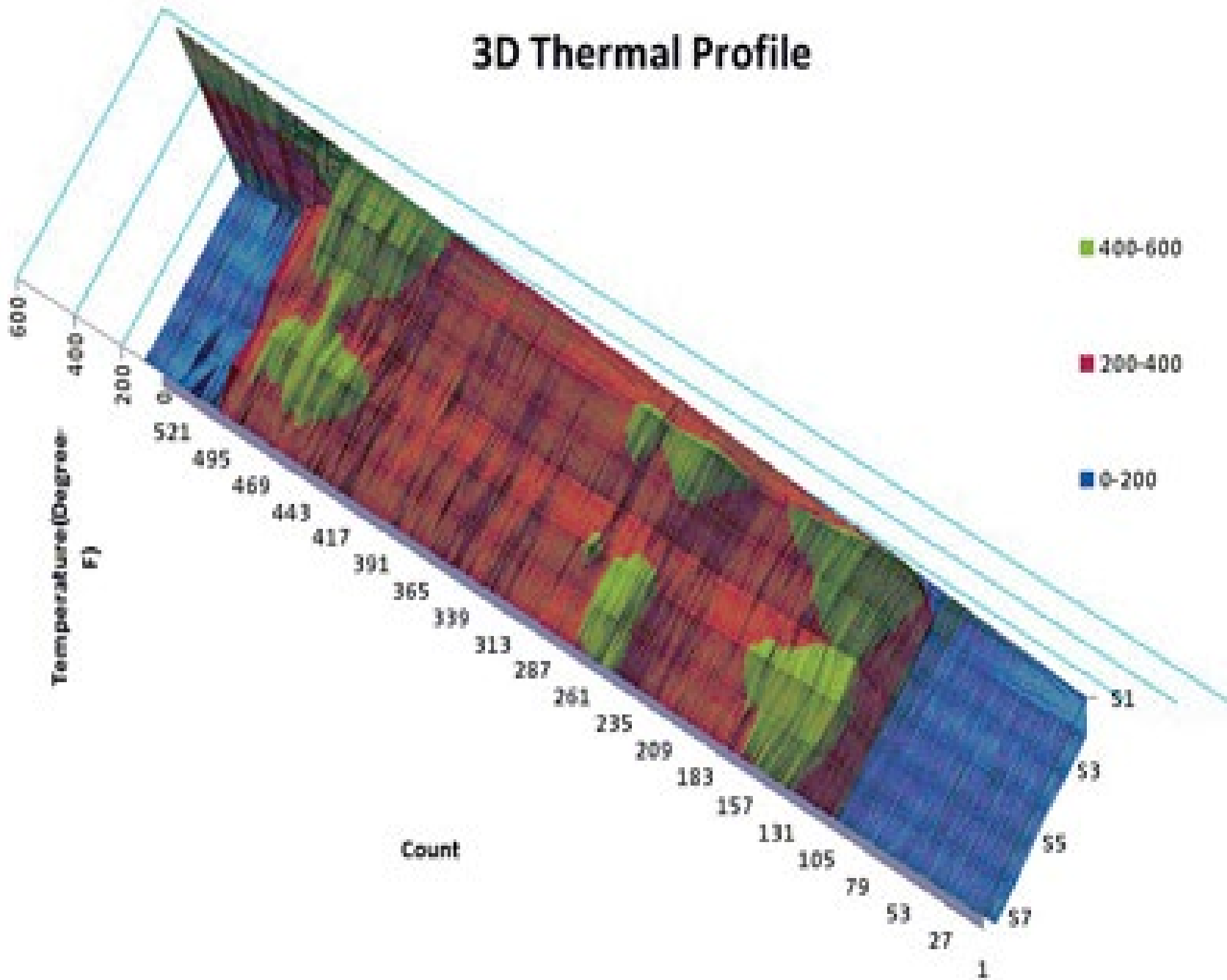
Ch. D- Ch. 4 of Node 6056

Ch. F- Part B (Node 6058 Ch 2)

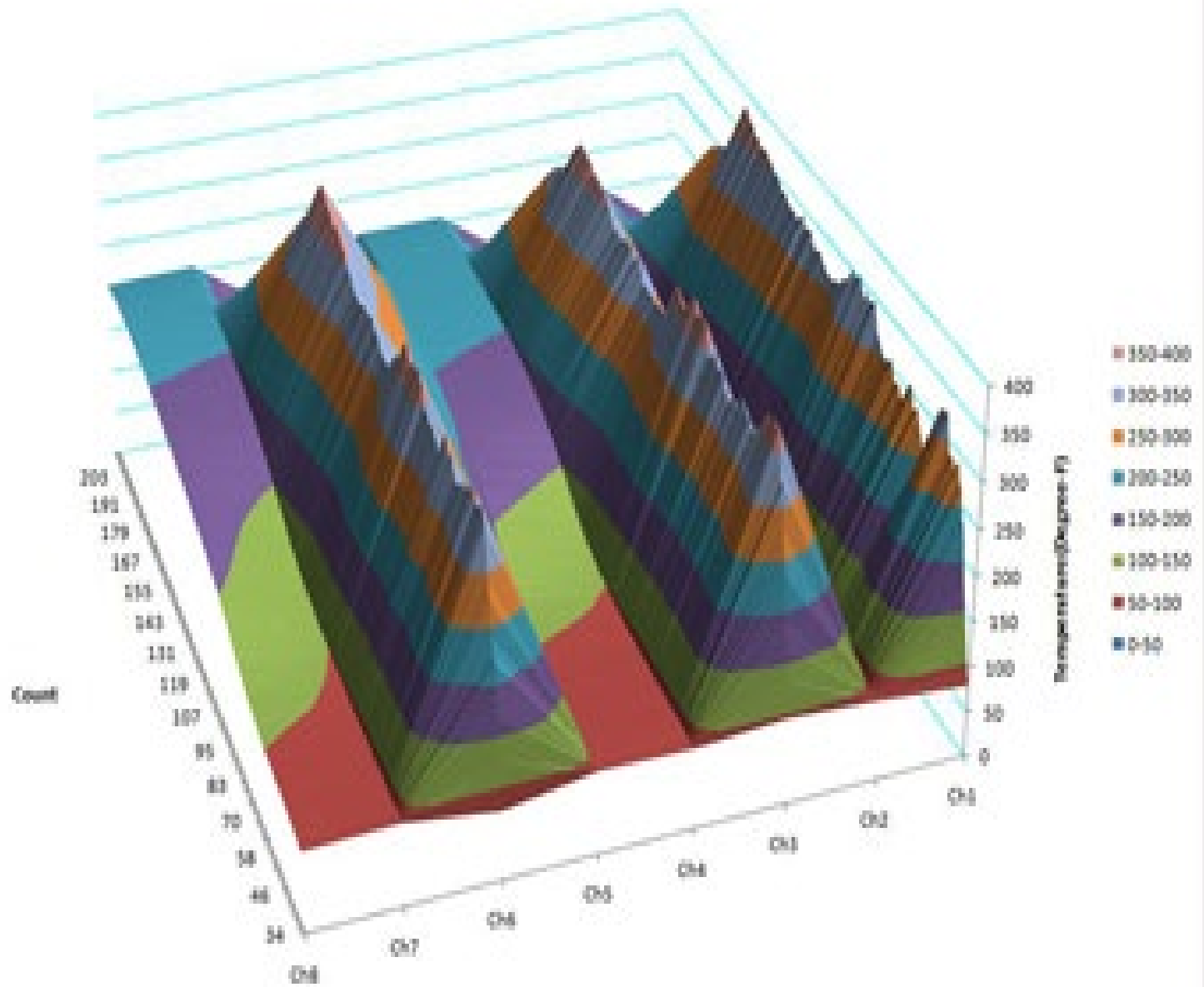
Ch. H- Outlet A (Node 6058 Ch 7)




3D Thermal Profile



Thermal Profile



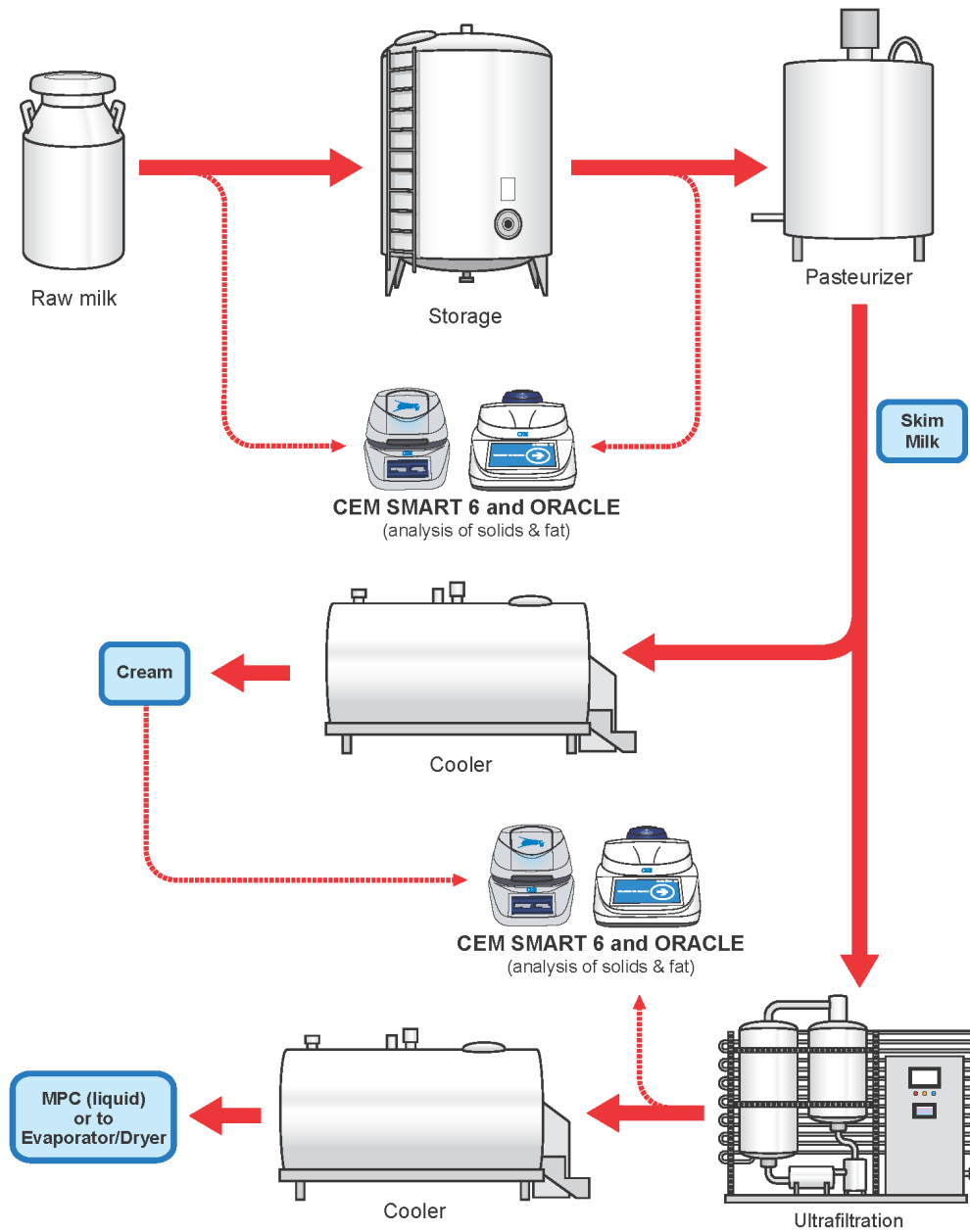
- 
- za bežično mjerenje relativne vlažnosti i temperature zraka ili proizvoda u pećnici, tunelu za sušenje, hlađenje ili smrzavanje, fermentoru i drugdje
 - točnost od 0,1 °C

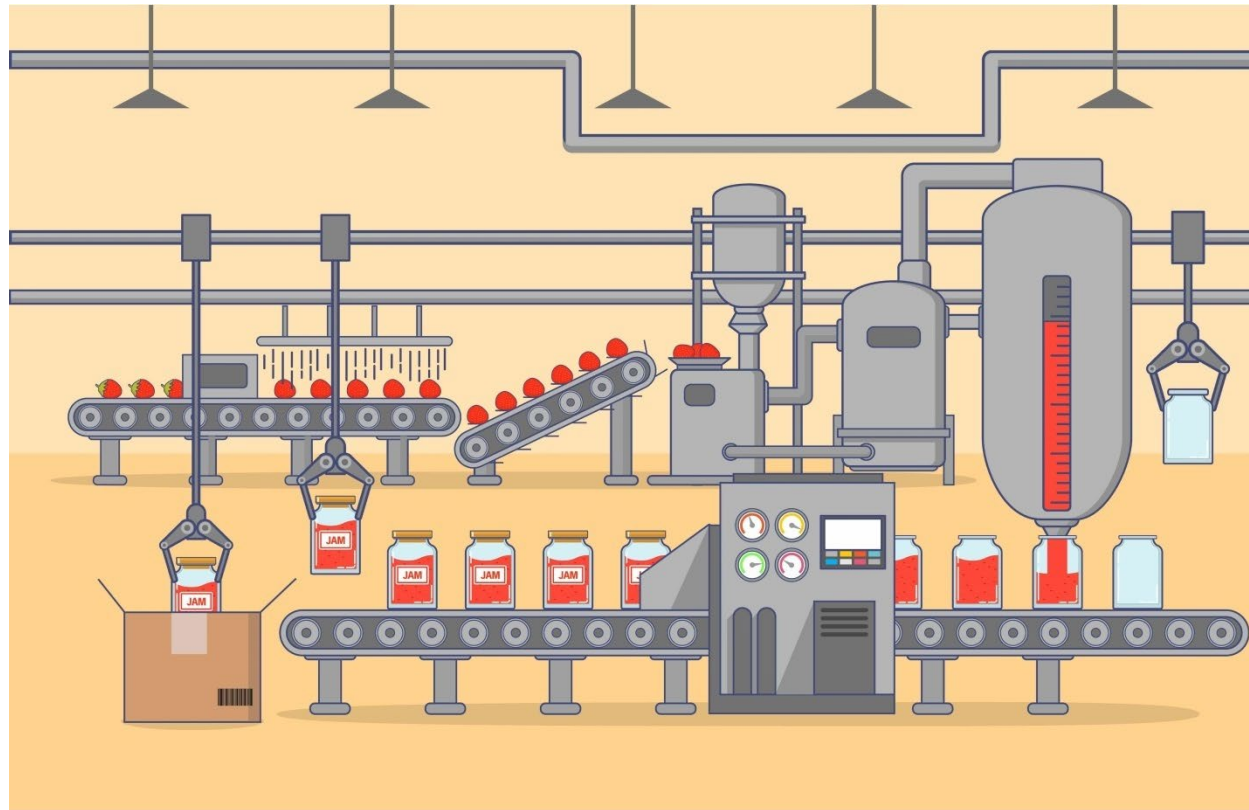
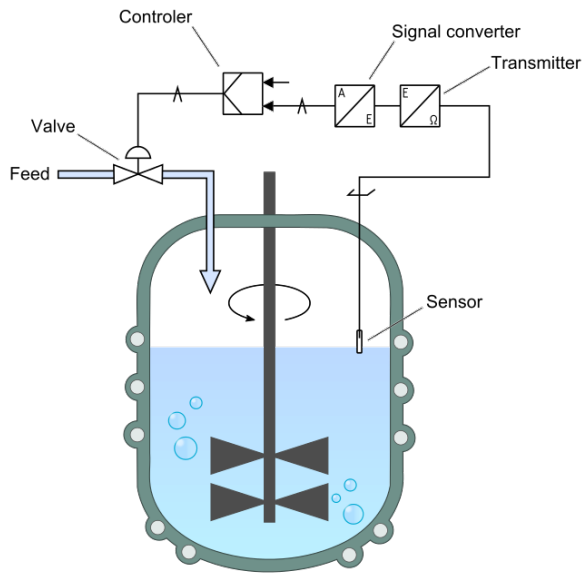
 - posebno je prikladna za prehrambeno-procesnu industriju i laboratorijska mjerenja
 - potrebno je računalo
 - oprema ne stvara dodatne troškove tijekom rada

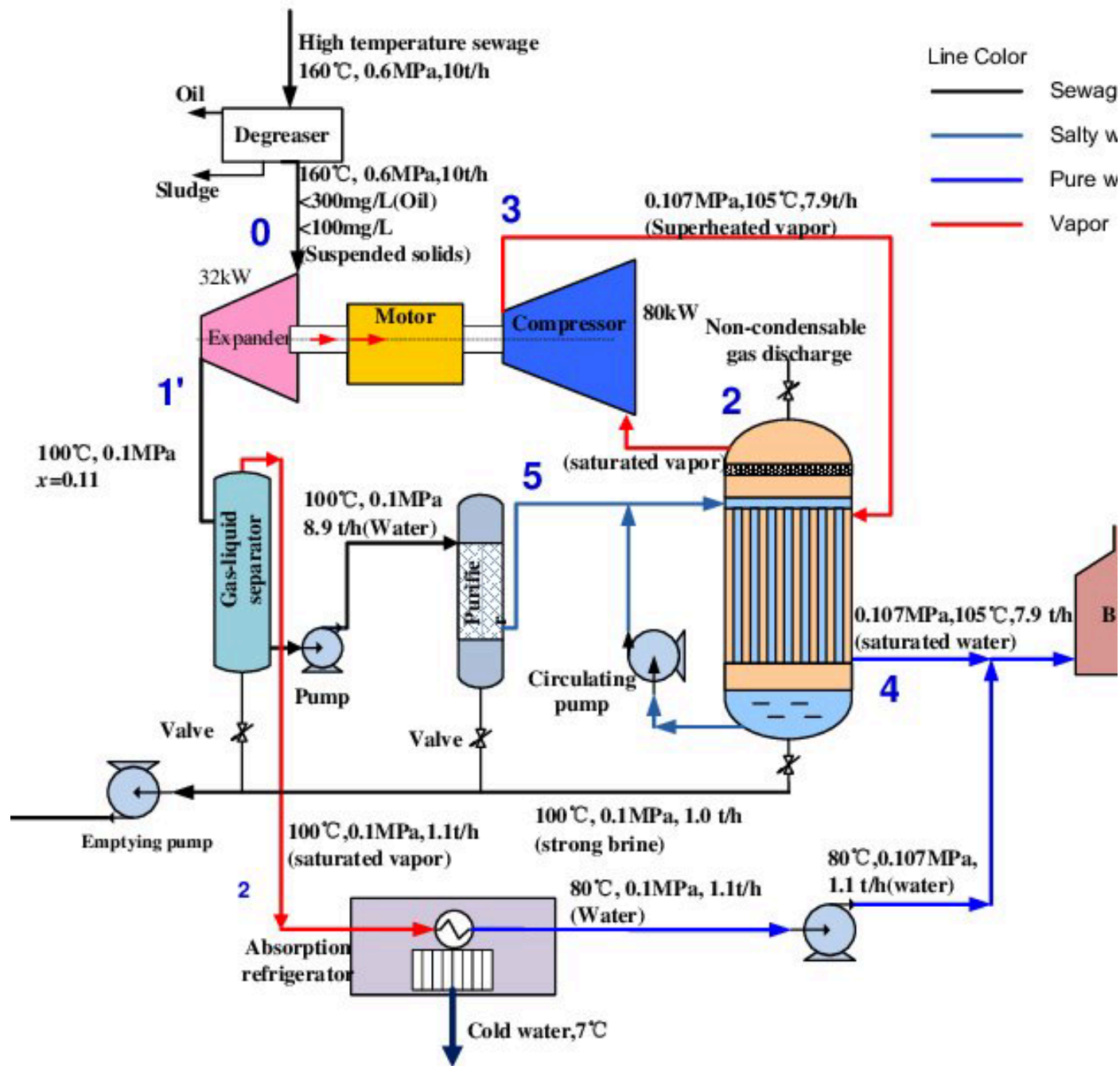
 - mjerenja u temperaturnom rasponu od -200 °C do 900 °C
 - oprema podnosi temperaturne raspone od -276 °C do 300 °C

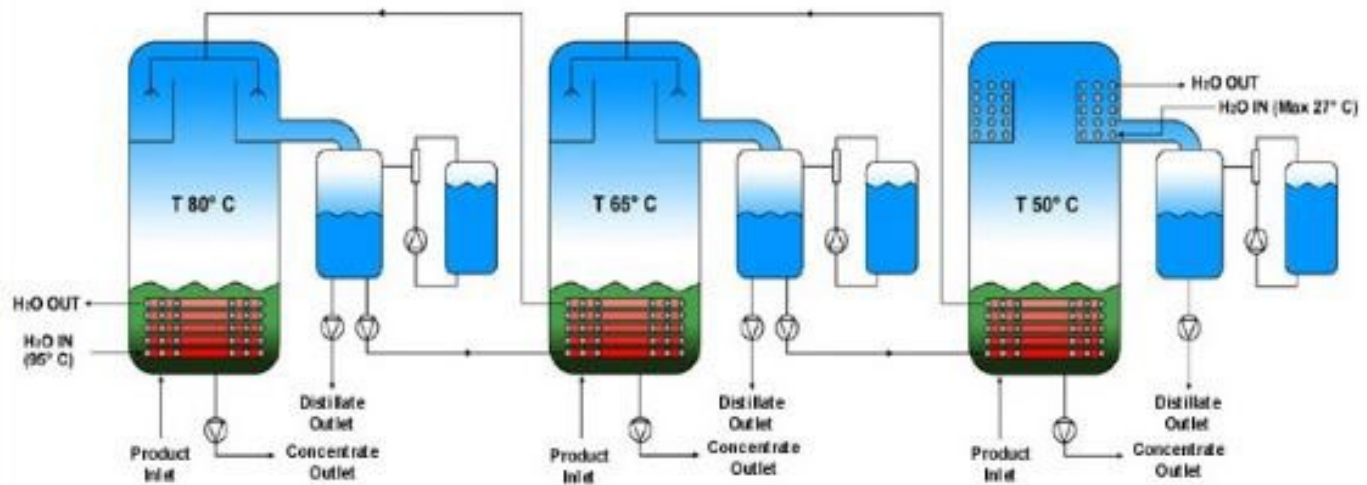
 - podaci se pohranjuju u Excel tablicu i u tekst formatu
 - tablični i grafički prikaz podataka (2D i 3D)

Milk Process

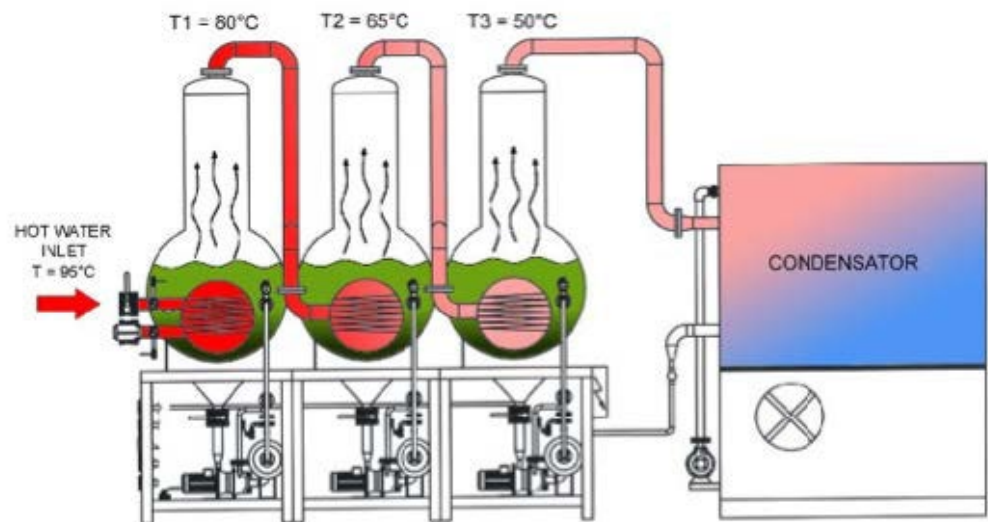
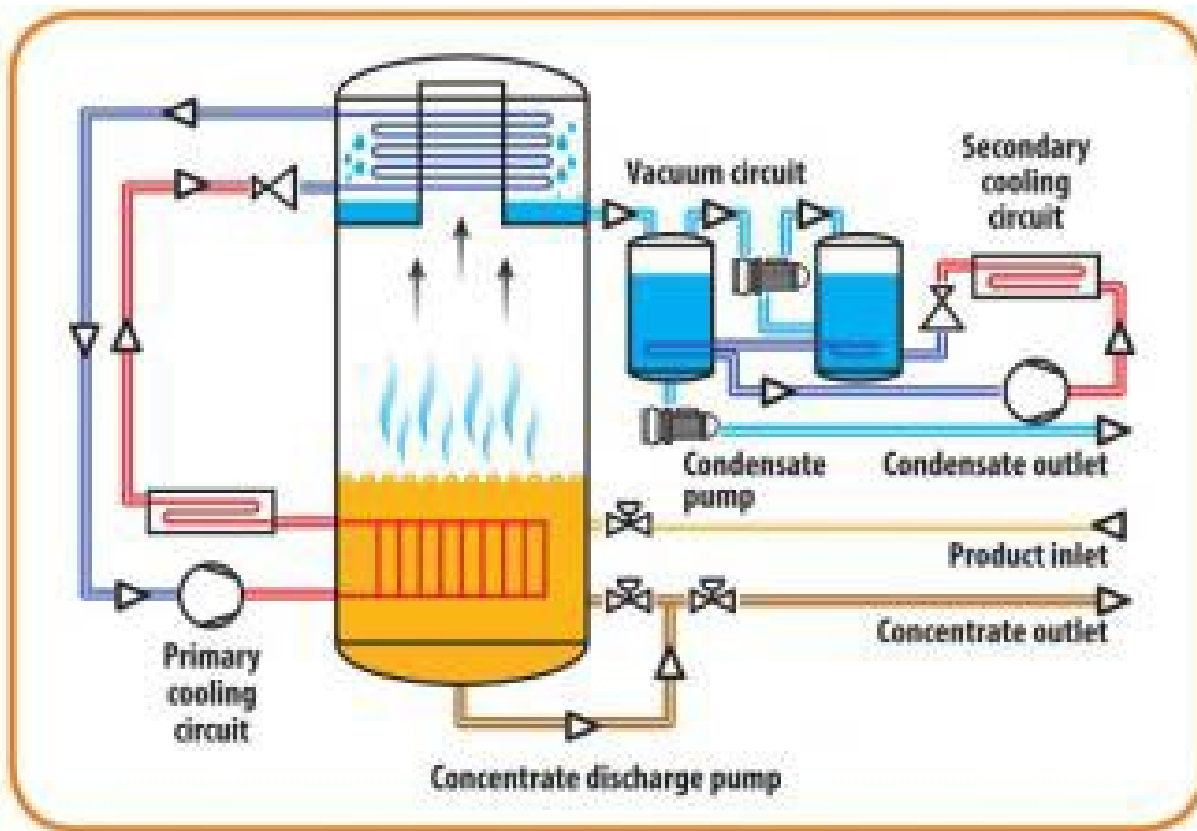








SIZE	LITRES/HOUR	Kcal REQUIREMENT *	DIMENSIONS* (b x l x h)
10000 VsWW/1	420	270.000	1800 X 3200 X 5000
20000 VsWW/1	840	540.000	2000 X 3200 X 6000
20000 VsWW/2	840	270.000	3600 X 3200 X 5000
30000 VsWW/1	1250	810.000	2000 X 3200 X 7000
30000 VsWW/2	1250	410.000	3600 X 3200 X 6000
30000 VsWW/3	1250	270.000	5400 X 3200 X 5000
40000 VsWW/2	1660	540.000	4000 X 3200 X 6000
60000 VsWW/2	2500	810.000	4000 X 3200 X 7000
90000 VsWW/3	3750	810.000	6000 X 3200 X 7000



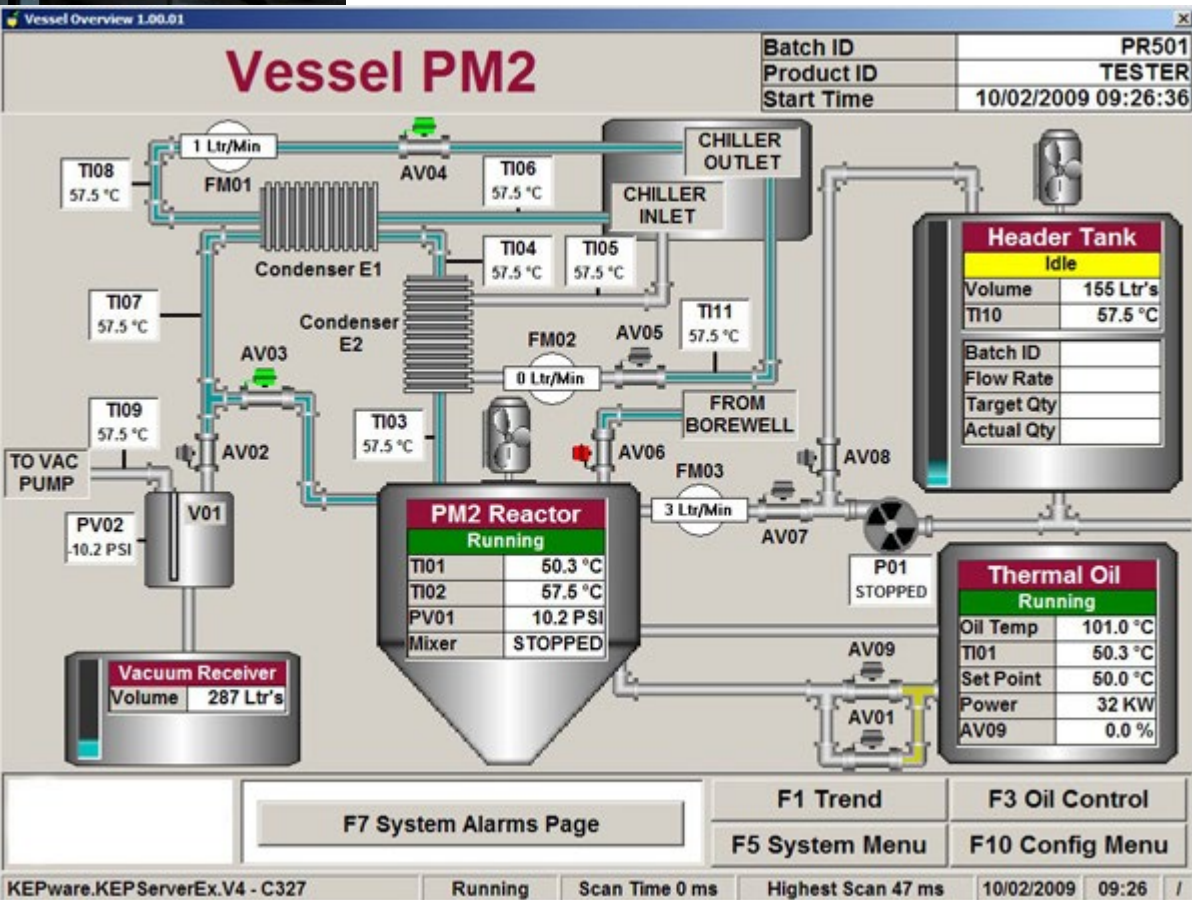


 dreamstime.com

ID 128658881 © Ryzhov















$$y = -0,1011x^6 + 3,4828x^5 - 45,334x^4 + 278,18x^3 - 803,89x^2 + 917,55x + 71,455$$

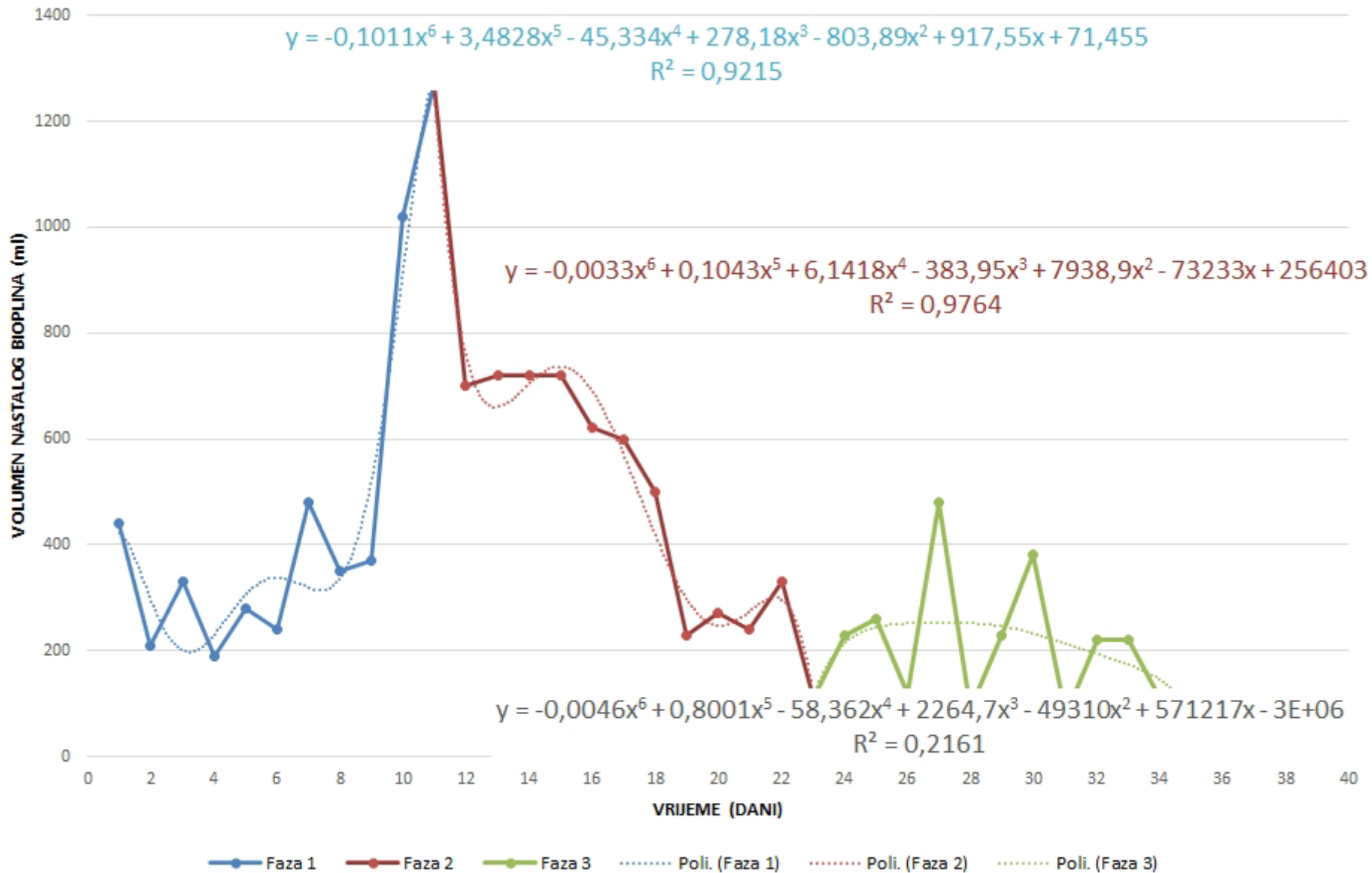
$$R^2 = 0,9215$$

$$y = -0,0033x^6 + 0,1043x^5 + 6,1418x^4 - 383,95x^3 + 7938,9x^2 - 73233x + 256403$$

$$R^2 = 0,9764$$

$$y = -0,0046x^6 + 0,8001x^5 - 58,362x^4 + 2264,7x^3 - 49310x^2 + 571217x - 3E+06$$

$$R^2 = 0,2161$$



the goodman group
university of cambridge

jonathan
goodman

contact us

data

people

programs

publications

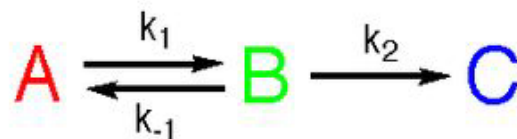
highlights:

c2k
CP3: NMR data
DP4: NMR data
force field
evaluation
InChIKey
collision
RInChI project
solubility
challenge

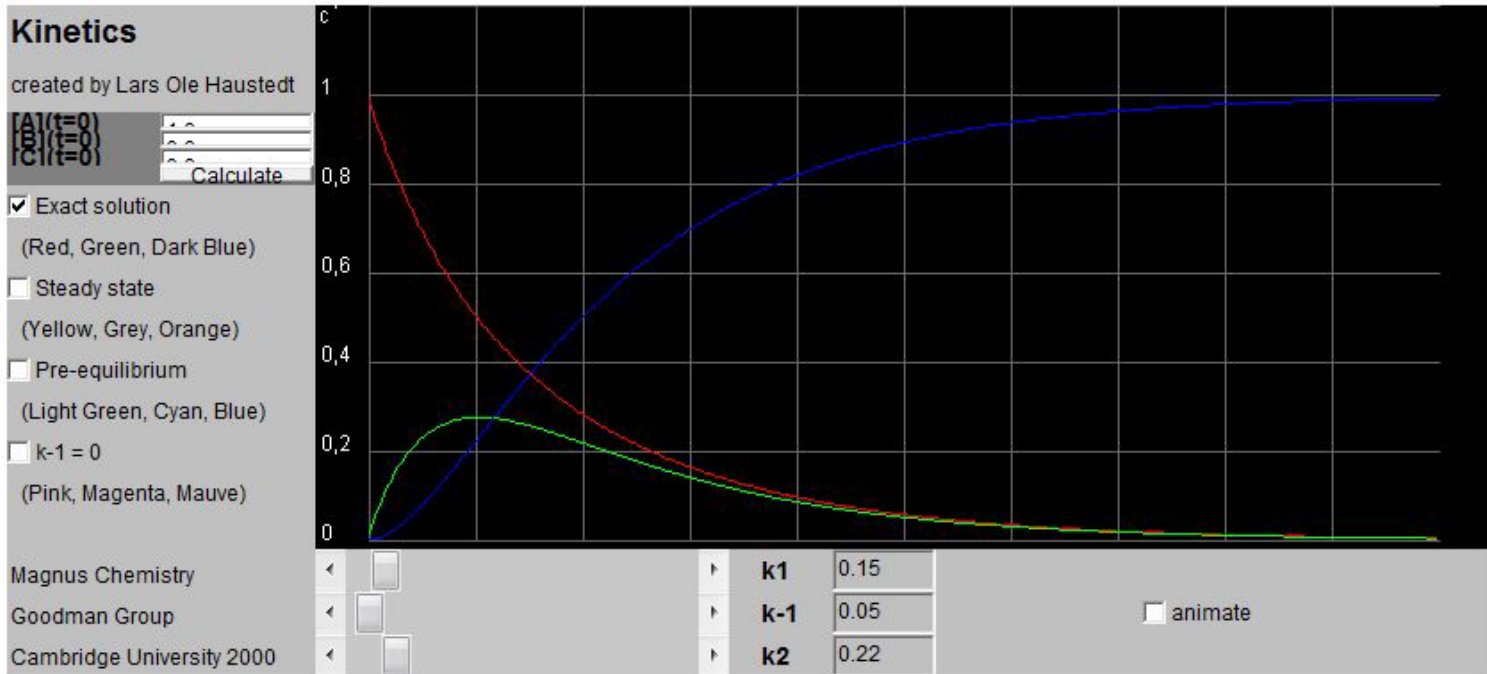
wiki (intranet)

Consecutive reactions

Consecutive first step reversible reactions



A turns into B, with rate constant k_1 , which turns into C, with rate constant k_2 . Now, B can turn back into A, with rate constant k_{-1} .



Notes on the kinetic equations and the applet.

Dohvaćanje i pretvaranje podataka Upiti & veze Sortiranje i filtriranje Alati za podatke Predviđanje Analiza

Formula bar:

1	Zadatak 3.A - Optimiranje sastava smjese														
2	NAKON IZMJENE ULAZNIH VRIJEDNOSTI:														
3	<i>Odabрати opciju Data/Solve</i>														

Potrebno je odrediti optimalan sastav smjese i dobiti najveću moguću količinu, a da bude zadovoljen normativ za spravljanje smjese.

rješenje	800		500
Fc =	1300	kg	

16	>=	15	DA
24	<=	85	DA
40	>=	-5	DA
800	<=	800	DA
500	<=	500	DA

RJEŠENJE JE TOČNO

Parametri alata za rješavanje

Postavljanje cilja: ↑

Prima: Maksimum Minimum Vrijednost:

Promjenom varijabilnih ćelija: ↑

Podložno ograničenjima:

\$J\$9 >= \$L\$9 Dodaj

\$J\$10 <= \$L\$10 Promijeni

\$J\$11 <= \$L\$11 Izbriši

\$J\$7 >= \$L\$7 Poništi sve

\$J\$8 <= \$L\$8 Učitaj/riješi

Pretvori varijable bez ograničenja u pozitivne

Odabrite metodu rješavanja: Mogućnosti

Metoda rješavanja

Za jednostavne nelinearne probleme alata za rješavanje odaberite GRG nelinearni mehanizam. Za linearne probleme alata za rješavanje odaberite jednostavni LP mehanizam, a za složene probleme alata za rješavanje odaberite evolucijski mehanizam.

Pomoć Riješi Zatvori

Model ograničenja

S1	S2			
0,15	0,1	>=	0,13	(S1+S2)
0,5	0,3	<=	0,47	(S1+S2)
0,1	0,06	>=	0,05	(S1+S2)
1	0	<=	800	
0	1	<=	500	

S2.







5.1. Linearno programiranje

Metode matematičkog optimiranja

Linearno programiranje

Struktura modela linearnog programiranja

Primjeri optimiranja primjenom Simplex algoritma:

- sastava smjese sirovina
- obroka i jelovnika
- plana proizvodnje
- prijevoza robe

Metode matematičkog optimiranja

- cjelobrojno programiranje
- linearno programiranje *
- nelinearno programiranje
- stohastičko programiranje
- dinamičko programiranje

Linearno programiranje

Linearno programiranje je rješavanje matematičkog zadatka s ciljem optimiranja vrijednosti *linearne funkcije cilja* čije varijable zadovoljavaju *sustav ograničenja* koji je zadan linearnim jednadžbama i/ili nejednadžbama.

Modeli linearnog programiranja

predstavljani su linearnim jednadžbama i nejednadžbama od kojih neke predstavljaju funkciju cilja, a neke ograničenja.

Primjene metode linearnog programiranja:

- izbor lokacije tvornica
- optimalno planiranje investicijskih ulaganja
- optimiranje proizvodnih programa ←
- optimiranje razmještaja strojeva
- izbor optimalnih tehnoloških postupaka
- optimiranje plana prehrane ←
- optimiranje transporta ←
- optimiranje sastava obroka ←
- ...

Općenito:

metode linearnog i nelinearnog programiranja
optimiraju modele sustava koji su u stacionarnom stanju

SIROVINA	MASNOĆA (%)	PEPEO (%)	CIJENA (kn/kg)
S ₁	0,08	0,02	1,8
S ₂	0,12	0,035	3,15

Namirnica		Bjelančevine		Masnoće	Ugljikohidrati	Cijena
		Životinjske	Biljne			(kn/kg)
x1	mast			1,00		10,0
x2	ulje			1,00		12,0
x3	meso	0,20		0,08		30,0
x4	mlijeko	0,03		0,04	0,05	6,0
x5	šećer				1,00	7,0
x6	riža		0,08	0,02	0,78	5,0
x7	brašno		0,12	0,02	0,72	4,0
x8	grah		0,24	0,02	0,47	15,0
x9	krumpir		0,02		0,19	2,0

Komponente obroka	Varijable	Energija (kJ)	Proteini (g)	Masti (g)	Ca (mg)	Fe (mg)	Vit. C (mg)	Cijena (kn)
Doručak 1 <i>Cornflakes, mlijeko</i>	d1	2050	6	3	350	4	3	3,0
Doručak 2 <i>pašteta, kruh, kakao</i>	d2	2136	8	7	369	6	2	3,8
Juha 1 <i>juha od rajčice</i>	x1	836	7	5	92	3	9	2,7
Juha 2 <i>juha od povrća</i>	x2	820	4	6	63	3	15	2,7
Prilog 1 <i>riža</i>	x3	1797	6	4	51	1	35	4,5
Prilog 2 <i>krumpir pire</i>	x4	1987	6	6	13	-	-	5,1
Govedina u umaku	x5	2430	20	29	60	5	10	5,7
Pljeskavica	x6	2900	28	39	34	2	5	6,9
Desert 1 <i>naranča</i>	x7	526	1	-	63	1	77	0,6
Desert 2 <i>puding</i>	x8	883	3	3	31	-	-	1,2
Desert 3 <i>kompot</i>	x9	1053	2	5	18	1	22	1,8
Desert 4 <i>pita od sira</i>	x10	2160	21	6	84	3	-	2
Večera 1 <i>hrenovke, kruh, senf</i>	v1	2898	12	16	25	2	3	5,6
Večera 2 <i>krafne, jogurt</i>	v2	2299	6	13	554	3	1	4,5

Struktura modela linearnog programiranja

Model linearnog programiranja čine:

model funkcije cilja

(Fc)

i

model ograničenja

(<, <=, =, >=, >)

- **Simplex metoda** (G. Dantzig, 1947. G)

Model funkcije cilja (linearni):

$$F_c = \underline{c_1} \cdot x_1 + \underline{c_2} \cdot x_2 + \dots + \underline{c_N} \cdot x_N \quad (\text{MIN / MAX})$$

Model ograničenja (linearni):

oblika \leq

$$a_{i,1} \cdot x_1 + a_{i,2} \cdot x_2 + \dots + a_{i,N} \cdot x_N \leq b_i$$

oblika $=$

$$a_{j,1} \cdot x_1 + a_{j,2} \cdot x_2 + \dots + a_{j,N} \cdot x_N = b_j$$

oblika \geq

$$a_{M,1} \cdot x_1 + a_{M,2} \cdot x_2 + \dots + a_{M,N} \cdot x_N \geq b_M$$

$$x_i \geq 0$$

M = broj ograničenja

N = broj varijabli

Ograničenja određuju skup dopustivih rješenja (n-terokut).

MODEL
FUNKCIJE
CILJA

EKONOMSKI UVJETI

*(cijene: sirovina, proizvoda, energije,
radne snage i kapitala)*

TEHNOLOŠKI UVJETI

*(iskoristivost tehnoloških kapaciteta,
sirovina i tržišta)*

KAKVOĆA PROIZVODA

(nutritivna i senzorska svojstva)

**MODEL
OGRANIČENJA**

EKONOMSKA OGRANIČENJA

*(ograničenost finansijskih sredstava,
raspoloživih sirovina i tržišta)*

TEHNOLOŠKA OGRANIČENJA

*(ograničenost tehnoloških postrojenja,
raspoloživost energije i radne snage)*

KAKVOĆA PROIZVODA

(standardi proizvoda i proizvodnje - ISO)

UTJECAJ NA OKOLIŠ

(kemijski i biološki utjecaj na okoliš)

Primjeri modela optimiranja

- Optimiranje sastava smjese sirovina (*količine i max. dobit*)
- Optimiranje sastava i cijene obroka (*sastav i min. cijena*)
- Optimiranje jelovnika (*sastav i min. cijena*)
- Optimiranje plana proizvodnje (*količine i max. dobit*)
- Optimiranje prijevoza robe (*količine i min. troškovi*)



Primjer 1.

Optimiranje dobiti i sastava smjese dvaju sirovina

SIROVINA	MAST (udio)	PEPEO (udio)	CIJENA (EUR/kg)
S_1	0,08	0,02	1,8
S_2	0,12	0,035	3,15

Prodajna cijena smjese je 4,5 EUR/kg.

MODEL FUNKCIJE CILJA

$F_{C \text{ MAX}} = \text{dobit} = \text{prodajna cijena} - \text{troškovi}$

(maksimum funkcije cilja)

$$F_{C \text{ MAX}} = 4,5 \cdot (S_1 + S_2) - (1,8 \cdot S_1 + 3,15 \cdot S_2) =$$

$$4,5 \cdot S_1 + 4,5 \cdot S_2 - 1,8 \cdot S_1 - 3,15 \cdot S_2$$

$$F_{C \text{ MAX}} = 2,7 \cdot S_1 + 1,35 \cdot S_2$$

OGRANIČENJA

Masti treba biti najmanje 10%.

Pepela smije biti najviše 3%.

$$\text{Masnoća} \geq 0,1 \quad (10\%)$$

$$\text{Pepeo} \leq 0,03 \quad (3\%)$$

U skladištu imamo 800 kg sirovine S_1 i 600 kg sirovine S_2 .

$$\text{Zalihe: } S_1 \leq 800$$

$$S_2 \leq 600$$

MODEL OGRANIČENJA

1. $0,02 \cdot S_1 + 0,035 \cdot S_2 \leq 0,03(S_1 + S_2)$

$$0,02 \cdot S_1 - 0,03 \cdot S_1 + 0,035 \cdot S_2 - 0,03 \cdot S_2 \leq 0$$

$$-0,01 \cdot S_1 + 0,005 \cdot S_2 \leq 0 \quad / \cdot (-200)$$

$$\mathbf{2 \cdot S_1 - S_2 \geq 0} \quad (S_1 \geq 0, S_2 = 0; S_1 \geq 250, S_2 = 500)$$

2. $0,08 \cdot S_1 + 0,12 \cdot S_2 \geq 0,1(S_1 + S_2)$

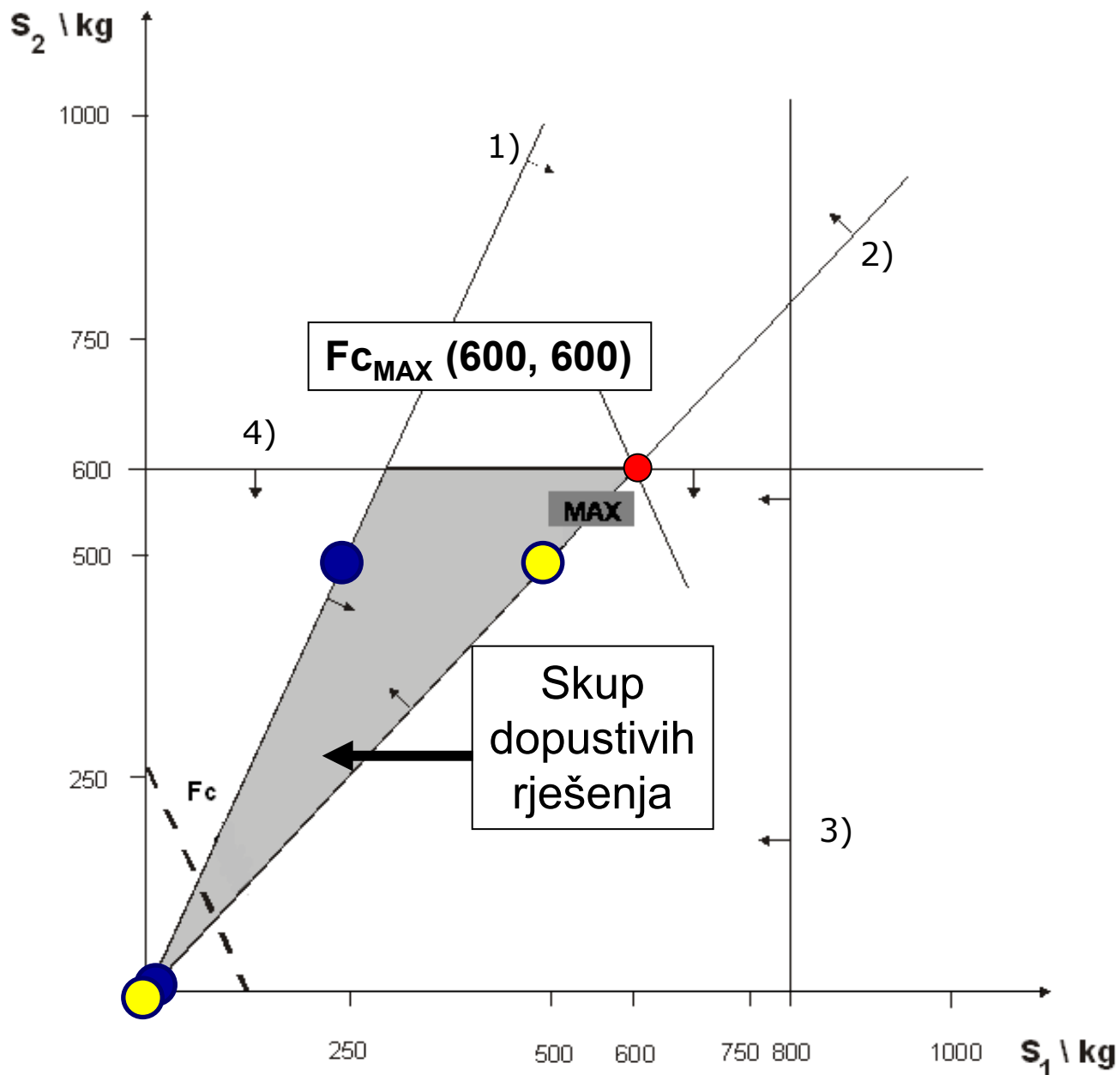
$$0,08 \cdot S_1 - 0,1S_1 + 0,12 \cdot S_2 - 0,1 \cdot S_2 \geq 0$$

$$-0,02 \cdot S_1 + 0,02 \cdot S_2 \geq 0 \quad / \cdot (-50)$$

$$\mathbf{S_1 - S_2 \leq 0} \quad (S_1 = 0, S_2 \geq 0; S_1 = 500, S_2 \geq 500)$$

3. $\mathbf{S_1 \leq 800}$ $(S_1 \leq 800, S_2 = 0; S_1 \leq 800, S_2 = 500)$

4. $\mathbf{S_2 \leq 600}$ $(S_1 = 0, S_2 \leq 600; S_1 = 500, S_2 \leq 600)$



$$\begin{aligned} F_{C \text{ MAX}} &= 2,7 \cdot S_1 + 1,35 \cdot S_2 = 2,7 \cdot \underline{600} + 1,35 \cdot \underline{600} \\ &= 2430 \text{ EUR/1200 kg} \\ &= 2,025 \text{ EUR/kg} \end{aligned}$$

ZAKLJUČAK:

Optimalan sastav smjese sirovina S_1 i S_2 , koji zadovoljava sva ograničenja bit će pripremljen sa 600 kg sirovine S_1 i 600 kilograma sirovine S_2 .

Pri takvom sastavu moguće je prodajom ostvariti maksimalnu dobit od 2430 EUR za 1200 kg smjese što je 2,025 EUR/kg prodane smjese.

Primjer korištenja računalnog programa LINDO ver. 6.0 !

LINDO ver. 6.0

(LINDO Systems, Inc. , Chicago, USA)

MAX 2.7S1+1.35S2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) **2430.000**

SUBJECT TO

2S1-S2>=0

S1-S2<=0

S1<=800

S2<=600

END

VARIABLE

VALUE

S1

600.000000

S2

600.000000



Primjer 2.

Optimiranje sastava i cijene obroka

Namirnica		Bjelančevine		Masnoće	Ugljikohidrati	Cijena (EUR/kg)
		Životinjske	Biljne			
x1	mast			1,00		10,0
x2	ulje			1,00		12,0
x3	meso	0,20		0,08		30,0
x4	mlijeko	0,03		0,04	0,05	6,0
x5	šećer				1,00	7,0
x6	riža		0,08	0,02	0,78	5,0
x7	brašno		0,12	0,02	0,72	4,0
x8	grah		0,24	0,02	0,47	15,0
x9	krumpir		0,02		0,19	2,0

MODEL FUNKCIJE CILJA

$$F_{c_{\text{MIN}}} = 10 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 + 30 \cdot x_3 + 6 \cdot x_4 + 7 \cdot x_5 + 5 \cdot x_6 + 4 \cdot x_7 + 15 \cdot x_8 + 2 \cdot x_9$$

OGRANIČENJA

- Minimalna količina mesa u obroku smije biti 0.3 kg
- Minimalna količina bjelančevina životinjskog podrijetla mora biti 0.028 kg
- Minimalna količina bjelančevina biljnog podrijetla mora biti 0.037 kg
- Minimalna količina ugljikohidrata mora biti 0.424 kg
- Maksimalna količina masnoća smije biti 0.1 kg

MODEL OGRANIČENJA

$$1) \quad x_3 \geq 0.3$$

$$2) \quad 0.2 x_3 + 0.03 x_4 \geq 0.028$$

$$3) \quad 0.08 x_6 + 0.12 x_7 + 0.24 x_8 + 0.02 x_9 \geq 0.037$$

$$4) \quad 0.05 x_4 + x_5 + 0.78 x_6 + 0.72 x_7 + 0.48 x_8 + 0.19 x_9 \geq 0.424$$

$$5) \quad x_1 + x_2 + 0.08 x_3 + 0.04 x_4 + 0.02 x_6 + 0.02 x_7 + 0.02 x_8 \leq 0.1$$

Primjer korištenja računalnog programa LINDO ver. 6.0 !

! Optimiranje sastava obroka

MIN $10X_1 + 12X_2 + 30X_3 + 6X_4 + 7X_5 + 5X_6 + 4X_7 + 15X_8 + 2X_9$

SUBJECT TO

$0X_1 + 0X_2 + 1X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 + 0X_7 + 0X_8 + 0X_9 \geq 0.3$

$0X_1 + 0X_2 + 0.2X_3 + 0.03X_4 + 0X_5 + 0X_6 + 0X_7 + 0X_8 + 0X_9 \geq 0.028$

$0X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0.08X_6 + 0.12X_7 + 0.24X_8 + 0.02X_9 \geq 0.037$

$1X_1 + 1X_2 + 0.08X_3 + 0.04X_4 + 0X_5 + 0.06X_6 + 0.02X_7 + 0.02X_8 + 0X_9 \leq 0.1$

$0X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0.05X_4 + 1X_5 + 0.78X_6 + 0.72X_7 + 0.48X_8 + 0.19X_9 \geq 0.424$

END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 4

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

Funkcija cilja (MIN) = 11.35556

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	10.000000
X2	0.000000	12.000000
X3	0.300000	0.000000
X4	0.000000	5.722222
X5	0.000000	1.444444
X6	0.000000	0.777778
X7	0.588889	0.000000
X8	0.000000	12.333333
X9	0.000000	0.944444

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	-30.000000
3)	0.032000	0.000000
4)	0.033667	0.000000
5)	0.064222	0.000000
6)	0.000000	-5.555555

NO. ITERATIONS= 4

ZAKLJUČAK:

Optimalan obrok, koji po svom sastavu zadovoljava sva zadana ograničenja, sastoji se od 300 g mesa i 589 g brašna.

Najniža cijena za pripremu 889 g obroka je 11,35556 EUR.

NAPOMENA:

Algoritam je odredio sva matematička rješenja koja zadovoljavaju postavljena ograničenja i odabrao rješenje s najnižom vrijednošću Funkcije cilja.

Sastav obroka i organoleptička svojstva nisu bila uvjetovana !



Primjer 3.

Optimiranje jelovnika za djevojke i mladiće

Komponente obroka	Varijable	Energija (kJ)	Proteini (g)	Masti (g)	Ca (mg)	Fe (mg)	Vit. C (mg)	Cijena (EUR)
Doručak 1 <i>Cornflakes, mlijeko</i>	d1	2050	6	3	350	4	3	1.00
Doručak 2 <i>pašteta, kruh, kakao</i>	d2	2136	8	7	369	6	2	1.35
Juha 1 <i>juha od rajčice</i>	x1	836	7	5	92	3	9	0.90
Juha 2 <i>juha od povrća</i>	x2	820	4	6	63	3	15	0.95
Prilog 1 <i>riža</i>	x3	1797	6	4	51	1	35	0.75
Prilog 2 <i>krumpir pire</i>	x4	1987	6	6	13	-	-	0.50
Govedina u umaku	x5	2430	20	29	60	5	10	2.50
Pljeskavica	x6	2900	28	39	34	2	5	2.10
Desert 1 <i>naranča</i>	x7	526	1	-	63	1	77	0.25
Desert 2 <i>puding</i>	x8	883	3	3	31	-	-	0.30
Desert 3 <i>kompot</i>	x9	1053	2	5	18	1	22	0.45
Desert 4 <i>pita od sira</i>	x10	2160	21	6	84	3	-	0.60
Večera 1 <i>hrenovke, kruh, senf</i>	v1	2898	12	16	25	2	3	1.25
Večera 2 <i>krafne, jogurt</i>	v2	2299	6	13	554	3	1	1.00

OGRANIČENJA

(prema RDA preporukama)

Maksimalna količina masti	(Ž: 70 g;	M: 96 g)
Minimalna količina energije u jelovniku	(Ž: 8280 kJ;	M: 10915 kJ)
Maksimalna količina energije u jelovniku	(Ž: 10120 kJ;	M: 13340 kJ)
Minimalna količina proteina	(Ž: 46 g;	M: 58 g)
Minimalna količina kalcija	(Ž: 1100 mg	M: 1100 mg)
Minimalna količina željeza	(Ž: 15 mg;	M: 10 mg)
Minimalna količina vitamina C	(Ž: 60 mg;	M: 60 mg)
Od dva ponuđena doručka treba izabrati samo jedan	$(d_1 + d_2 = 1)$	
Od dvije ponuđene juhe treba izabrati samo jednu	$(x_1 + x_2 = 1)$	
Od dva ponuđena priloga treba izabrati samo jedan	$(x_3 + x_4 = 1)$	
Od dva glavna jela treba izabrati samo jedno	$(x_5 + x_6 = 1)$	
Od četiri ponuđena deserta treba izabrati samo jedan	$(x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 1)$	
Od dvije ponuđene večere treba izabrati samo jednu	$(v_1 + v_2 = 1)$	
Varijable trebaju biti cijeli brojevi	(integer)	

MIN 1D1+1.35D2+0.9X1+0.95X2+0.75X3+0.5X4+2.5X5+2.1X6+0.25X7+0.3X8+0.45X9+
+ 0.6X10+1.25V1+1V2

SUBJECT TO

3d1+7d2+5x1+6x2+4x3+6x4+29x5+39x6+3x8+5x9+6x10+16v1+13v2<=70

2050d1+2136d2+836x1+820x2+1797x3+1987x4+2430x5+2900x6+526x7+883x8+
+ 1053x9+2160x10+2898v1+2299v2>=8280

2050d1+2136d2+836x1+820x2+1797x3+1987x4+2430x5+2900x6+526x7+883x8+
+ 1053x9+2160x10+2898v1+2299v2<=10120

6d1+8d2+7x1+4x2+6x3+6x4+20x5+28x6+1x7+3x8+2x9+21x10+12v1+6v2>=46

350d1+369d2+92x1+63x2+51x3+13x4+60x5+34x6+63x7+31x8+18x9+84x10+
+ 25v1+554v2>=1100

4d1+6d2+3x1+3x2+1x3+5x5+2x6+1x7+1x9+3x10+2v1+3v2>=15

3d1+2d2+9x1+15x2+35x3+10x5+5x6+77x7+22x9+3v1+1v2>=60

d1+d2=1

x1+x2=1

x3+x4=1

x5+x6=1

x7+x8+x9+x10=1

v1+v2=1

END

int d1: int d2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 6.400000

VARIJABLA	VRIJEDNOST	CIJENA
D1	1.000000	1.000000
D2	0.000000	1.350000
X1	1.000000	0.900000
X2	0.000000	0.950000
X3	1.000000	0.750000
X4	0.000000	0.500000
X5	1.000000	2.500000
X6	0.000000	2.100000
X7	1.000000	0.250000
X8	0.000000	0.300000
X9	0.000000	0.450000
X10	0.000000	0.600000
V1	0.000000	1.250000
V2	1.000000	1.000000

Minimalna cijena obroka za djevojke = 6,40 EUR

d_1	d_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	v_1	v_2
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1

Nutritivni sastav

Energija (kJ)	Proteini (g)	Mast (g)	Ca (mg)	Fe (mg)	Vitamin C (mg)
9938	46	54	1170	17	135

Maksimalna cijena obroka za djevojke = 6,75 EUR

d_1	d_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	v_1	v_2
0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1

Nutritivni sastav

Energija (kJ)	Proteini (g)	Mast (g)	Ca (mg)	Fe (mg)	Vitamin C (mg)
10024	48	58	1189	19	134

Minimalna cijena obroka za mladiće = 6,80 Kn

d_1	d_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	v_1	v_2
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1

Nutritivni sastav

Energija (kJ)	Proteini (g)	Mast (g)	Ca (mg)	Fe (mg)	Vitamin C (mg)
11556	63	61	1162	19	64

Maksimalna cijena obroka za mladiće = 7,15 Kn

d_1	d_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	v_1	v_2
0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1

Nutritivni sastav

Energija (kJ)	Proteini (g)	Mast (g)	Ca (mg)	Fe (mg)	Vitamin C (mg)
11642	65	65	1181	21	63



Primjer 4.

Optimiranje plana proizvodnje

	Jogurt (X_1)	Acidofil (X_2)	KAPACITET ($h\ dan^{-1}$)
Priprema ($h\ dan^{-1}$)	1.2	0.8	23
Fermentacija ($h\ dan^{-1}$)	3.5	4.5	22
Pakiranje ($h\ dan^{-1}$)	2.5	2.2	20
TROŠKOVI ($EUR\ t^{-1}$)	4000	6000	
CIJENA ($EUR\ t^{-1}$)	7500	11000	
MIN. KOLIČINE (t)	1	2	
OPTIMALNI PLAN (t)	?	?	

MODEL FUNKCIJE CILJA

$F_{C_{MAX}} = \text{profit} = \text{CIJENA} - \text{TROŠKOVI}$

Pretpostavimo da je $F = 15750$

$$F_{C_{MAX}} = (7500 X_1 + 11000 X_2) - (4000 X_1 + 6000 X_2)$$

$$F = 3500 X_1 + 5000 X_2$$

$$F_{C_{MAX}} = 3500 X_1 + 5000 X_2$$

$$(X_2=0, X_1=5); (X_1=0, X_2=3.5)$$

MODEL OGRANIČENJA

1. $1.2 X_1 + 0.8 X_2 \leq 23$

2. $3.5 X_1 + 4.5 X_2 \leq 22$

3. $2.5 X_1 + 2.0 X_2 \leq 20$

4. $X_1 \geq 1$

5. $X_2 \geq 2$

1. $1.2 X_1 + 0.8 X_2 \leq 23$

$$X_1 \leq 19.167 - 0.667 X_2$$

$$(X_2=0, X_1 \leq 19.167); (X_2=10, X_1 \leq 12.497)$$

2. $3.5 X_1 + 4.5 X_2 \leq 22$

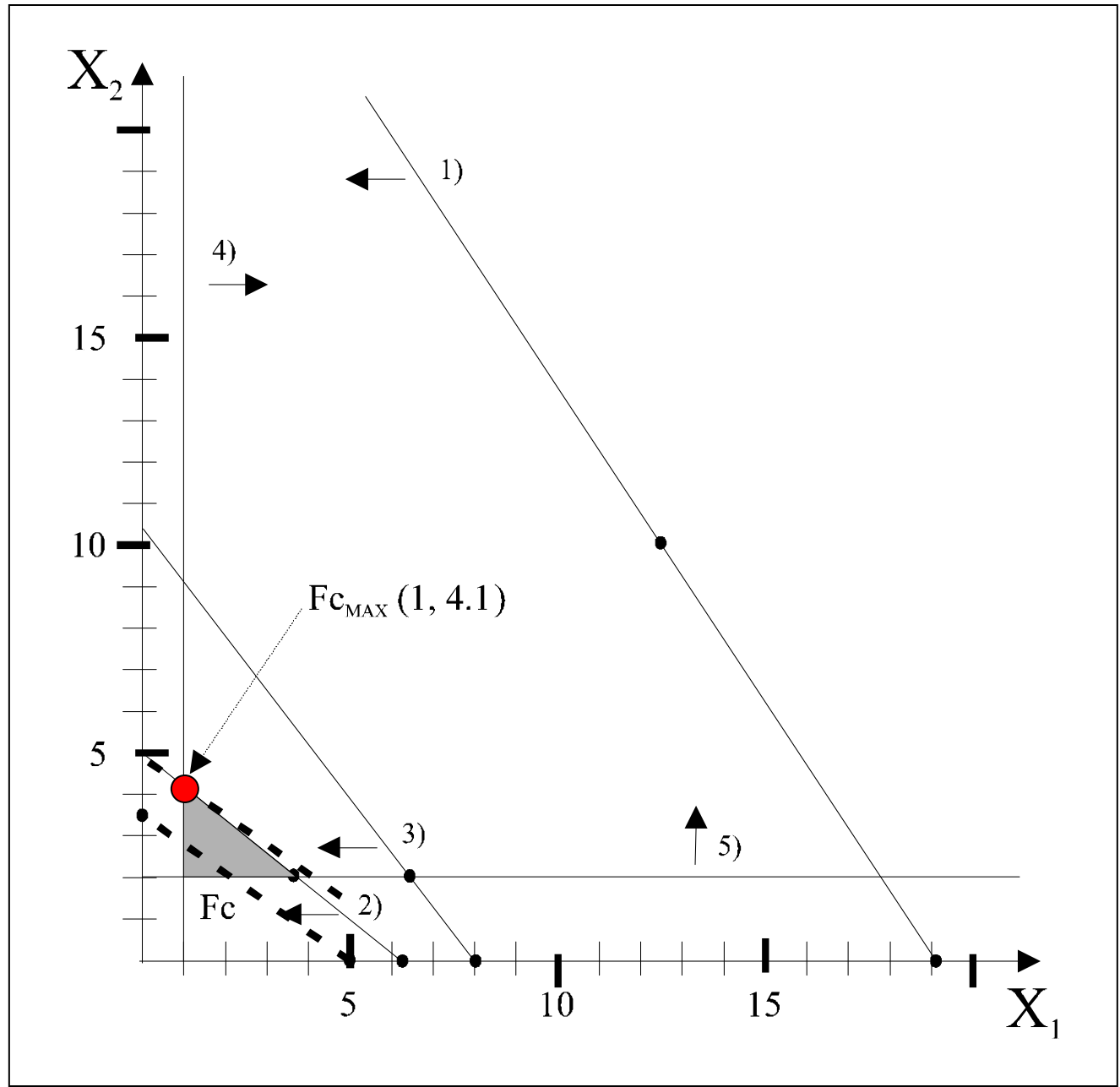
$$X_1 \leq 6.286 - 1.286 X_2$$

$$(X_2=0, X_1 \leq 6.286); (X_2=2, X_1 \leq 3.714)$$

3. $2.5 X_1 + 2.0 X_2 \leq 20$

$$X_1 \leq 8 - 0.8 X_2$$

$$(X_2=0, X_1 \leq 8) (X_2=2, X_1 \leq 6.4)$$



$$F_{C_{MAX}} = 3500 X_1 + 5000 X_2 = 3500 \cdot 1 + 5000 \cdot 4.1 = 24000 \text{ EUR}$$

Maksimalan profit uz optimalno iskorištenje pogona je 24000 EUR, a proizvede se 1 tona jogurta (X_1) i 4.1 tona acidofila (X_2).

Provjera rješenja:

- | | | | |
|----|-------------------------------|------------------|---|
| 1) | $X_1 \leq 19.167 - 0.667 X_2$ | $1 \leq 16.4323$ | ✓ |
| 2) | $X_1 \leq 6.286 - 1.286 X_2$ | $1 \leq 1.0134$ | ✓ |
| 3) | $X_1 \leq 8 - 0.8 X_2$ | $1 \leq 4.72$ | ✓ |
| 4) | $X_1 \geq 1$ | $1 \geq 1$ | ✓ |
| 5) | $X_2 \geq 2$ | $4.1 \geq 2$ | ✓ |

LINDO ver. 6.0

(LINDO Systems, Inc. , Chicago, USA)

MAX 3500x1+5000x2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

SUBJECT TO

1) **24055.55**

$$1.2x_1 + 0.8x_2 \leq 23$$

$$3.5x_1 + 4.5x_2 \leq 22$$

$$2.5x_1 + 2x_2 \leq 20$$

$$x_1 \geq 1$$

$$x_2 \geq 2$$

END

VARIABLE VALUE

X1 1.000000

X2 4.111111



Primjer 5.

Optimiranje prijevoza robe
iz tri tvornice na četiri prodajna mjesta

Optimiranje prijevoza gotovog proizvoda od tvornice do tržišta

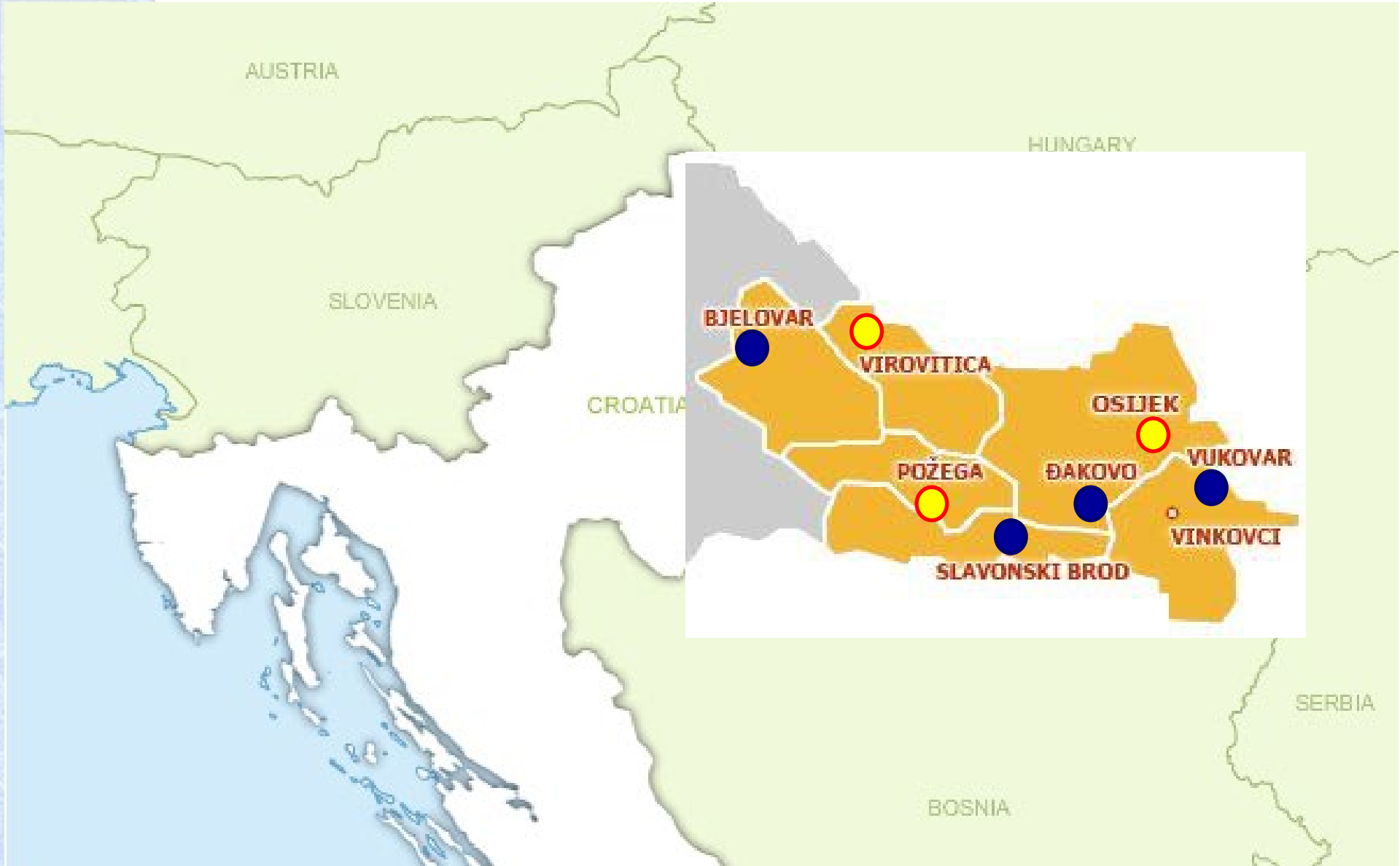
PRIMJER 1.

U regiji koju snabdijeva proizvodima proizvođač ima tri tvornice (T) i četiri prodajna mjesta (P).

Treba optimirati prijevoz gotovih proizvoda tako da svako tržište dobije potrebnu količinu proizvoda, a da troškovi prijevoza budu najmanji (MIN Fc).

Tvornice su označene oznakama T1, T2 T3.

Prodajna mjesta (tržišta) označena su oznakama P1, P2, P3 i P4.



AUSTRIA

HUNGARY

SLOVENIA

CROATIA

SERBIA

BOSNIA

BJELOVAR

VIROVITICA

OSIJEK

POŽEGA

ĐAKOVO

VUKOVAR

SLAVONSKI BROD

VINKOVCI

Tvornica T1 dnevno može proizvesti 10 tona proizvoda.

Tvornica T2 dnevno može proizvesti 12 tona proizvoda.

Tvornica T2 dnevno može proizvesti 17 tona proizvoda.

Kapaciteti tvornica T1, T2 i T3 ($t \text{ dan}^{-1}$)

	Kapacitet <i>(t dan⁻¹)</i>
T1	10
T2	12
T3	17
Σ	39

Prodajno mjesto P1 dnevno treba najmanje 4 tone proizvoda.
Prodajno mjesto P2 dnevno treba najmanje 8 tona proizvoda.
Prodajno mjesto P3 dnevno treba najmanje 9 tona proizvoda.
Prodajno mjesto P4 dnevno treba najmanje 12 tona proizvoda.

Prodajno mjesto P1 dnevno treba najviše 5 tona proizvoda.
Prodajno mjesto P2 dnevno treba najviše 10 tona proizvoda.
Prodajno mjesto P3 dnevno treba najviše 10 tona proizvoda.
Prodajno mjesto P4 dnevno treba najviše 13 tona proizvoda.

PRODAJNO MJESTO	MINIMALNO <i>(t dan⁻¹)</i>	MAKSIMALNO <i>(t dan⁻¹)</i>
P1	4	5
P2	8	10
P3	9	10
P4	12	13
Σ	33	38

Cijena prijevoza od tvornice T1 do prodajnog mjesta P1 je 4 EUR t⁻¹.

Cijena prijevoza od tvornice T1 do prodajnog mjesta P2 je 2 EUR t⁻¹.

Cijena prijevoza od tvornice T1 do prodajnog mjesta P3 je 3 EUR t⁻¹.

Cijena prijevoza od tvornice T1 do prodajnog mjesta P4 je 1 EUR t⁻¹.

Cijena prijevoza od tvornice T2 do prodajnog mjesta P1 je 3 EUR t⁻¹.

...

Cijene prijevoza od tvornice do tržišta (EUR t⁻¹)

	P1	P2	P3	P4
T1	4	2	3	1
T2	3	3	5	7
T3	5	4	7	4

Rješenje primjenom programa LINDO

MIN 4 X11+2 X12+3 X13+ X14+
+3 X21+3 X22+5 X23+7 X24+
+5 X31+4 X32+7 X33+4 X34

SUBJECT TO

X11+ X12+ X13+ X14<=10

X21+ X22+ X23+ X24<=12

X31+ X32+ X33+ X34<=17

X11+ X21+ X31>=4

X12+ X22+ X32>=8

X13+ X23+ X33>=9

X14+ X24+ X34>=12

X11+ X21+ X31<=5

X12+ X22+ X32<=10

X13+ X23+ X33<=10

X14+ X24+ X34<=13

END

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 108.0000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X11	0.000000	3.000000
X12	0.000000	1.000000
X13	9.000000	0.000000
X14	1.000000	0.000000
X21	4.000000	0.000000
X22	0.000000	0.000000
X23	8.000000	0.000000
X24	0.000000	4.000000
X31	0.000000	1.000000
X32	8.000000	0.000000
X33	0.000000	1.000000
X34	3.000000	0.000000

Najmanje dnevne količine za isporuku

	P1	P2	P3	P4	Ukupno	kapacitet
T1			1	9	10	10
T2	4		8		12	12
T3		8		3	11	17
MIN	4	8	9	12	33	39

Da bi bile zadovoljene najmanje dnevne potrebe prodajnih mjesta potrebno je:

- iz tvornice T1 odvesti 9 t proizvoda na prodajno mjesto P3 i 1 t proizvoda na prodajno mjesto P4,
- iz tvornice T2 odvesti 4 t proizvoda na prodajno mjesto P1 i 8 t proizvoda na prodajno mjesto P2,
- iz tvornice T3 odvesti 8 t proizvoda na prodajno mjesto P2 i 3 t proizvoda na prodajno mjesto P4.

Izračunata je vrijednost Funkcije cilja $F_c = 108$ EUR i to su najmanji mogući dnevni troškovi prijevoza naručene količine robe.

Najveće dnevne količine za isporuku

	P1	P2	P3	P4	ukupno	kapacitet
T1	5	4			9	10
T2				12	12	12
T3		6	10	1	17	17
MA X	5	10	10	13	38	39

Za najveće dnevne potrebe prodajnih mjesta potrebno je:

- iz tvornice T1 odvesti 5 t proizvoda na prodajno mjesto P1 i 4 t proizvoda na prodajno mjesto P2,
- iz tvornice T2 odvesti 12 t proizvoda na prodajno mjesto P4,
- iz tvornice T3 odvesti 6 t proizvoda na prodajno mjesto P2, 10 t proizvoda na prodajno mjesto P3 i 1 t proizvoda na prodajno mjesto P4.

Izračunata je vrijednost Funkcije cilja $F_c = 210$ EUR i to su najveći mogući dnevni troškovi prijevoza naručene količine robe.

Elementi neophodni za opisivanje tablica i grafikona

PROCES UREĐAJ	MATERIJAL NAMIRNICA UZORAK	IZMJERENO IZRAČUNATO	UVJETI METODA	POČETNI UVJETI	MJERNE VELIČINE MJERNE JEDINICE
Protočni kemijski reaktor	Reaktant A Produkt B Produkt C	Izračunate vrijednosti	Slijedni reakcijski mehanizam	$Q = 0,01 \text{ Ls}^{-1}$ $A_0 = 2 \text{ gL}^{-1}$ $V = \text{konst.}$	Protok (Ls^{-1}) Koncentracija (gL^{-1}) Volumen (L)
Jednostruki uparivač	Rijetki sok naranče	Izračunate vrijednosti	Newton-Raphsonova metoda	Q_s, T_s, x $Q_p, T_p,$ $V = \text{konst.}$	Protok (Ls^{-1}) Temperatura ($^{\circ}\text{C}$) Udio suhe tvari (gg^{-1})
Tunelski uređaj za smrzavanje	Grašak	Izračunate vrijednosti	Eulerova metoda	L, v, T_z, v_{zr} H_g, d_g, k_g, T_g H_A, R_A, d_A, V_A, k_A	Duljina (m) Brzina trake (ms^{-1}) Temperatura ($^{\circ}\text{C}$) Kof. prijenosa topline ($\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$)